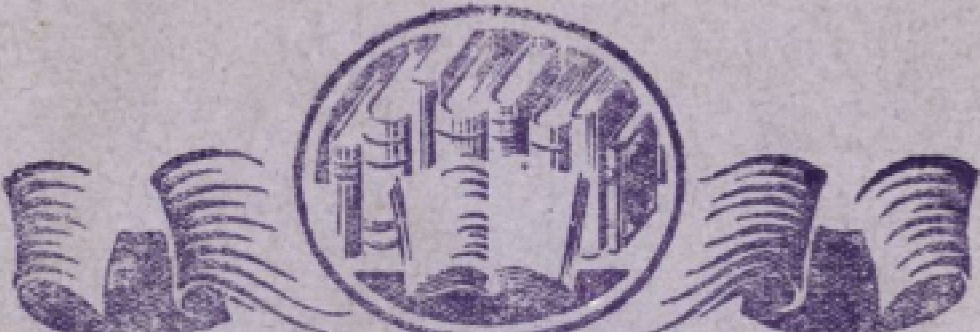


ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Проф. В. Л. Гончаров

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОПЕДЕВТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

МОСКВА · 1947 · ЛЕНИНГРАД

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Проф. В. Л. ГОНЧАРОВ
Член-корреспондент Академии педагогических наук

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ
И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОПЕДЕВТИКА В СРЕДНИХ КЛАССАХ ШКОЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1947 Ленинград

Имеющие отношение к этой книге всякого рода вопросы, замечания, сообщения, предложения, возражения, поправки и т. п. — просьба направлять по адресу:

Москва, Лобковский пер., д. 5/16, Институт методов обучения АПН — проф. В. Л. Гончарову.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник арифметических упражнений представляет собой в нашей методической литературе первую попытку конкретного разрешения одной из трудных методических задач, с которой приходится сталкиваться каждому преподавателю средней школы.

В вопросе о формах повторения арифметического материала, усовершенствования и закрепления навыков вычислений в средних и старших классах школы до сих пор нет достаточной определённости. С другой стороны, и понятие о функции проходится в курсе алгебры обычно довольно поверхностно, без того, чтобы была проявлена должная забота о создании и накоплении у учащихся соответствующего конкретного числового и графического опыта. Что, когда и как надо делать, чтобы оба этих важнейших участка работы обеспечить полезными и в достаточной мере интересными для учащихся упражнениями, остаётся неясным для большинства преподавателей. В результате внимание уделяется обычно лишь повторению стандартного арифметического материала и мало эффективным упражнениям в черчении графиков. Такое положение дела крайне неблагоприятно сказывается, с одной стороны, на уровне вычислительной культуры оканчивающих среднюю школу и на усвоении ими чрезвычайно важного как с практической, так и с теоретической точки зрения понятия о функции — с другой.

Настоящий сборник не является случайным набором отдельных задач, а представляет собой результат продуманной и экспериментально проверенной работы автора в направлении устранения указанных недостатков. Тем не менее — в силу новизны самого метода — практическое освоение этого опыта преподавателями средней школы в настоящее время должно производиться в экспериментальном порядке. Проникновение идей автора в повседневную практику школы потребует, конечно, и времени и дальнейшей методической работы: предлагаемый вниманию учителя сборник, вместе со статьей автора в 6-м выпуске Известий Академии педагогических наук, представляют собой лишь первые шаги в этом направлении.

Что же должен иметь в виду преподаватель, задающийся вопросом о том, как ему в своей школьной практике использовать предлагаемый материал?

Прежде всего, надо освоиться со следующими основными идеями автора.

Первая заключается в том, что внимание переключается на арифметическую вычислительную работу, как таковую, с точки зрения свойственных ей специфических аттрибутов, вне традиционной — и здесь не нужной — прямой связи с прохождением и закреплением теоретического материала курса. И преподаватель и учащиеся должны, не отвлекаясь в сторону и не интересуясь в данный момент непосредственно никакими вопросами теоретического порядка, сконцентрировать своё внимание и усилия на чёткой и целесообразной организации и выполнении вычислений. В связи с этим автор старается указать наиболее экономные, простые и эффективные способы выполнения работы. Как в работе преподавателя, так и в работе учащихся должна быть обнаружена предельная организованность, собранность и лаконичность, — ничего лишнего, только то, что непосредственно нужно для действия, для выполнения намеченной работы и её контроля. Очень определённые и детальные указания в отношении порядка проведения упражнений, расположения вычислений и т. д. облегчат преподавателю переход к этому стилю работы. Этот стиль должен прежде всего сделать — на время проведения упражнений данного типа — своим достоянием сам преподаватель, — этот стиль должны почувствовать и перенять учащиеся.

Вторая сторона дела заключается в том, что непосредственно упражнения не ведут ни к каким теоретическим обобщениям, которые должны были бы быть непременно формулированы преподавателем или учащимися. Однако они построены так, что самое выполнение этих упражнений следует рассматривать как активный со стороны учащихся процесс накопления опыта, естественным образом приводящего к образованию и закреплению соответствующих понятий на конкретной числовой и графической основе.

Эти оба элемента и обусловливают интерес, который, как показывает практика, проявляют учащиеся к этому новому для них виду упражнений. Определённость, чёткость, организованность самой работы, бросающаяся в глаза практичность и простота предлагаемых приёмов производства и записи действий, — всё это вносит элемент новизны в обычный процесс арифметических вычислений и имеет воспитательное значение, которое трудно переоценить. С другой стороны, не навязываемое ученику, а неизбежно выясняющееся в самом процессе работы её „скрытое“ функциональное содержание, обнаруживающееся при сопоставлении результатов и построении графика, создаёт у учащихся интерес к получаемым числовым результатам, к их функциональному осмысливанию и к приобретению необходимой для этого быстрой и уверенной вычислительной технике.

Все это облегчает включение предлагаемых автором упражнений — до некоторой степени независимо от повседневной работы над курсом — в практику преподавания в порядке эпизодически проводимых отдельных работ в самые различные моменты процесса обучения, даже в условиях строгой экономии учебного времени.

Вместе с тем, преподавателю, который решит действительно ввести эти упражнения в учебный процесс, придётся тщательно изучить предлагаемый материал, освоить особенности нового стиля в проведении вычислительных упражнений и внимательно продумать все детали, вплоть до моментов контроля и способов раздачи заданий, которым автор уделяет — с полным основанием — большое внимание.

Время, которое придётся затратить на эту стадию работы и на приобретение затем индивидуального опыта в проведении упражнений, с избытком окупится общим повышением вычислительной культуры и сознательности учащихся, — приобретаемой здесь не за счёт заучивания „теории“, а на основе непосредственной активной деятельности и обогащения числового и графического опыта.

Конечно, здесь многое зависит от творческой деятельности преподавателя и от внимательного учёта конкретных условий, в которых протекает учебный процесс в каждом случае. Предлагаемый сборник ни с точки зрения содержания упражнений, ни в отношении методической стороны дела не следует рассматривать как нечто обязательное в полном объёме. Но вдумчивый преподаватель найдёт в нём материал, который, несомненно, можно эффективно использовать после соответствующей подготовки, подходя к делу с должной постепенностью, но вместе с тем и с необходимой решительностью, определённостью и организованностью.

В результате такого — более широкого — опыта удастся, надо думать, выяснить и уточнить ряд методических вопросов, относящихся к этой, в достаточной мере актуальной, теме.

Член-корреспондент АПН РСФСР

проф. И. В. Арнольд.

ОТ АВТОРА

Арифметические — вычислительные и графические — упражнения, помещённые в настоящем сборнике, объединены общей целью: воспитать в сознании учащегося живые, наглядные, образные представления, связанные с числами и их совокупностями, с изменяемостью величин и функциональными соотношениями. Мы убеждены, что преподавание математики, исходящее из одних лишь формально-логических предпосылок, не может обеспечить прочности усвоения и оставляет учащегося беспомощным перед задачами конкретного и прикладного содержания. При обучении математике губителен отрыв числа — от отражаемых им отношений в окружающем нас мире, и математической формулы — от её числового содержания.

Совершенствование арифметических навыков и, с другой стороны, накопление первоначального материального опыта, необходимого для возникновения идеи функции, — не чуждые друг другу задачи. Однотипные числовые примеры, выполняемые в процессе приобретения определённого оперативного навыка, естественно осмысливаются вопросом: как изменяется результат в зависимости от изменения исходных данных? Обратно, при построении графика функции „по точкам“, при составлении числовой таблицы, учащийся должен волей неволей совершать арифметические операции; и недостаточная беглость в таковых нередко оказывается — гораздо позднее — существенным препятствием для более глубокого освоения идеи функции.

Более обстоятельно эти соображения развиты в статье, имеющей то же заглавие, что и эта книга, и напечатанной в 6-ом томе „Известий Академии педагогических наук РСФСР“; там же приведена аргументация в пользу необходимости очень ранней и длительной функциональной пропедевтики — в интересах как высшей, так и самой средней школы.

Предлагаемая здесь серия упражнений по своему замыслу является единым целым и предоставляет, в форме типических задач, материал функционального содержания для VI, VII и VIII классов средней школы[1]. Вместе с тем каждое упражнение преследует самостоятельную „видимую“, понятную для учащегося цель, а взаимная подчинённость упражнений почти отсутствует, так что проведение в классе не всей серии, а лишь некоторых её частей, или даже отдельных упражнений, также способно дать соответствующий положительный эффект. К VI классу отнесены пять упражнений, к VII — семь, к VIII — двенадцать; предполагается, что каждое упражнение занимает час (редко два) работы в классе и является содержанием одного или двух домашних заданий. Большинство упражнений связано с текущими разделами курса и служит целям их более глубокого и прочного усвоения; другие могут быть отнесены к повторению арифметики. Более подробные (впрочем, лишь ориентировочные) указания о том, к каким разделам курса следует приурочить отдельные упражнения, а также относительно необходимого для них времени, приведены в таблице в конце книги.

Упражнения 1—5 преследуют цель сообщения и укрепления полезных приемов счёта (методы контроля, округление, сокращённые действия, систематизированная запись), которые должны стать прочным приобретением и постоянно использоваться в дальнейшем. Упражнения 6 и 12 развивают идею порядка, приучают пользоваться неравенствами и содержат полезные элементы дедукции. Упражнения 7 и 10 пригодны для первого ознакомления с координатной сеткой. Упражнения 8, 11, 13, 16—18 и другие, помимо устремления к „видимым“ целям, дают примеры „графического контроля“ вычислений. Богатое функциональным содержанием упражнение 9 стимулирует навык читать „на-глаз“ эмпирические данные. В упражнении 14 обнаруживается, что квадратная сетка обладает замечательным, практически важным свойством: с её помощью легко строить выражения, зависящие от квадратных радикалов из рациональных чисел. Упражнение 15 знакомит с применением многоколонных схем. Учащиеся убеждаются дальше, что графически записаны и контролируемы могут быть изменения каких угодно величин — геометрические (упражнение 19) или любой физической размерности (упражнение 20). Следуют, наконец, упражнения 21—23, посвящённые записи движений на плоскости, и упражнение 24, последнее вполне традиционного содержания (решение прямоугольных треугольников), предоставляющее особенно удобный случай для практики в сокращённых умножениях и делениях.

---

[1] Сюда не включены традиционные упражнения с диаграммами (сравнение длин рек, скоростей передвижения и т. п.), возможные уже в V классе. Что касается старших классов, то для них был бы нужен иной функциональный материал, который уже не являлся бы „пропедевтическим“.

Каждое из 24 упражнений в этой книге изложено по одному и тому же плану: тексту упражнения предшествует некоторая пропедевтика, конспект беседы, которую преподаватель проводит с участием учащегося, вызванного к доске, и активно вовлекая весь класс; за самим текстом следует детально разработанный пример-образчик; в заключение приводятся методические замечания, обращённые к учителю. Нужно заметить, что вступительная часть намечает содержание беседы лишь схематически, в общих чертах, и уже дело самого преподавателя — в случае надобности (не слишком отвлекая в сторону внимание класса) — придать излагаемому материалу ту или иную, более конкретную, или „жизненную“, оболочку. В иных случаях вполне возможно „осмыслить“ с помощью увлекательного условия и самый текст упражнения.

Методика предлагаемых упражнений довольно своеобразна. После предварительной беседы, сопровождающейся необходимыми упражнениями-примерами, основной текст (условие) пишется на доске. Работа должна быть „налажена“, начата и до известной хотя бы степени продвинута на этом же самом уроке; то, что осталось недоделанным, „задаётся на дом“, причём обязательно выполняется всеми учащимися („сдаётся“) и обязательно просматривается („проверяется“) преподавателем.

Предварительная беседа обыкновенно строится таким образом, что само упражнение из неё как бы „вырастает“, являясь её естественным завершением; предметом беседы служит тот или иной навык (вычислительный или графический), а упражнение предоставляет учащимся случай применить его самостоятельно, или с некоторой помощью учителя, тем самым проверяя, насколько он усвоен. В иных случаях предварительная работа у доски затянется не менее, чем на два урока (упражнение 4); в других — предварительные разъяснения не нужны, и можно сразу сообщить текст упражнения (7, 8, 13, 24). После того, как текст сообщён, следует, в порядке „налаживания" работы, с одним из учеников приступить на доске к выполнению самого упражнения, показывая тем самым „образчик" всему классу. Сказать: „Остальное сделайте дома" следует тогда, когда и принципиальные и технические затруднения полностью исчерпаны и остаётся лишь выполнение однотипных операций. Как исключение, упражнение 7 должно быть закончено в течение одного часа; вероятно, несколько затянется „доделка дома" в упражнениях 9, 12, 22.

Выполнять заданные упражнения в тетрадках технически мало удобно: лучше, чтобы они были выполнены на отдельных листах, со стандартными пометками, сделанными рукой ученика (школа, класс, фамилия, инициалы, дата), и его же подпись („сделал такой-то"); к этому впоследствии присоединяется пометка преподавателя („принято" или „сдано тогда-то"). Для большинства работ нужно два листа: основной и вспомогательный. Все главные результаты сосредоточиваются на основном листе: вспомогательный лист учитель смотрит по мере надобности; но „сдаются" непременно оба. Вспомогательный лист не следует смешивать с „черновиком", представляющим собою мало желательное явление в классе: с черновика „переписывают набело" и затем его уничтожают, тогда как записи, расположенные на вспомогательном и на основном листе не повторяют друг друга, и каждый из этих двух листов теряет свою ценность, если другой отсутствует. Подробнее о вспомогательном и основном листе говорится в методических замечаниях к отдельным упражнениям.

Учащиеся, приступающие к нашим упражнениям, должны быть снабжены клетчатой бумагой[1]. По меньшей мере таковая необходима для основного листа в упражнениях: 8—11, 14—16, 18—24; клетчатая тетрадка полезна также и при пропедевтических записях[1]. Предполагается, что размер одной клетки составляет 1,8—2 *мм*. На доске координатную сетку с клеточками крупных размеров чертит сам преподаватель (надо научиться делать это без потери времени). Масштабы на данном этапе всегда указывает преподаватель.

---

[1] В миллиметровой бумаге, вообще говоря, надобности нет.

Все предлагаемые (основные, а не пропедевтические) упражнения мыслятся нами строго индивидуализированными. Это достигается следующим образом. Вместо буквенных параметров, фигурирующих в тексте задачи (или на пустые места в те или иные „клеточки"), учащийся ставит полученные им собственные „числовые значения". Эти значения, с минимальной потерей времени, или раздаются[2] на заранее приготовленных учителем карточках или распределяются[3] с помощью вытягивания наугад из „цифрового набора" (ящичек, стакан или мешочек с 1000—2000 карточками размером в 1 *см*², на которых стоят цифры 0, 1, 2 ..., 9). Просмотр („проверка") индивидуализированных работ не обременителен для преподавателя: упражнения сконструированы таким образом, что или вычисления контролируются самими учащимися, или результаты записываются в графической форме; в том и в другом случае опытный глаз преподавателя легко обнаружит возможные неувязки, и тогда преподаватель уже не обязан вскрывать их причину: достаточно указать их автору работы и добиться, чтобы „к следующему уроку" ошибки, вызывающие неувязки, были устранены. Не такая уж беда, если при поисках ошибок последует помощь со стороны; но нужно, чтобы ученик был сконфужен или пристыжен, если за эти поиски придётся взяться самому преподавателю. Нужно, чтобы учащиеся постепенно привыкли к той мысли, что они должны быть ответственными за правильность проделанных ими вычислений. Так как упражнения по самому замыслу строго регламентированы, то подаваемые работы обыкновенно не представляют особенного разнообразия, и, помимо упомянутых неувязок, те или иные промахи (неудачный порядок действий, плохое расположение схемы или чертежа, неудобный масштаб и т. п.) нередко носят „массовый“ характер: естественно обратить на них внимание всего класса, не настаивая, впрочем, на переделках, если числовые результаты отмеченными недочётами серьезно не затронуты.

---

[1] Особая тетрадь для этих записей не нужна: она может быть обыкновенной классной тетрадью по математике.

[2] Безвозвратно.

[3] Будучи возвращаемы обратно.

Настоящие упражнения предоставляют преподавателю обширные возможности для развития профессионального мастерства и для применения собственной изобретательности. Нужно надеяться, что учительский опыт укажет пути для дальнейшего улучшения тематики и для дальнейшей шлифовки приёмов проведения упражнений предлагаемого типа.

Можно порекомендовать тому, кто будет пользоваться этой книгой, предварительно просмотреть её внимательно от начала до конца.

1. МЕТОД ПРОВЕРКИ С ПОМОЩЬЮ ДЕВЯТКИ

Упражнение имеет в виду: 1) тренировать учащихся в умножении многозначных чисел, 2) познакомить их с записью результатов в форме двойной таблицы, 3) научить пользоваться при умножении простейшим теоретико-числовым методом контроля (с помощью девятки).

Каждый может легко научиться **укорачивать** числа так, как будет сейчас показано.

Если хотим укоротить число 427561, то скажем: „четыре да два — шесть, да ещё семь — тринадцать, да ещё пять — восемнадцать, да ещё шесть — двадцать четыре, да, наконец, ещё один — двадцать пять“. Число 25 уже гораздо короче, чем 427561, но можно укорачивать и дальше: „два да пять — семь“. Окончательно, 427561 после укорачивания дает 7. Будем записывать укороченное число правее данного, отделяя вертикальной черточкой:

427561 | 25 | 7,

или сразу:

427561 | 7.

ПРАВИЛО 1. Чтобы укоротить число, достаточно сложить все его цифры; и, если нужно, снова сложить цифры того числа, которое получится.

Вот примеры:

413 | 8
1 006 | 7
312 101 | 8
687 | 21 | 3
14 597 | 26 | 8
1 946 | 20 | 2
84 379 268 | 47 | 11 | 2.

Как ни просто действие „укорачивание“, всё же, действуя по правилу 1, приходится порядочно считать в уме. Но можно облегчить работу во много раз.

ПРАВИЛО 2. **Складывая цифры, выбрасывать все девятки.**

Например, занимаясь числом 427561, можно сказать: „два да семь — девять; долой двойку и семёрку!“ „Четыре и пять — девять; долой четвёрку и пятёрку!“ „Остаётся шесть да один — будет семь“.

Если больше нравится, можно цифр не зачёркивать, а ради собственного удобства отмечать цифры, которые вместе дают девятку и, следовательно, уничтожаются:

$$1\underbrace{45}\dot{9}7 \mid 8,$$

$$84\overbrace{3\underbrace{7\dot{9}2}6}8 \mid 20 \mid 2.$$

Можно выбрасывать девятки и „на-ходу“, например, так. Укорачиваем число 687. Скажем: „шесть да восемь — четырнадцать; один да четыре — пять; пять да семь — двенадцать; один да два — три“. И пишем:

$$687 \mid 3.$$

Или ещё возьмём число 1946. Девятку выбросим сразу, а затем скажем: „четыре да шесть — один; один да один — два“: $1\dot{9}46 \mid 2.$

В числе 84 379 268 выбросим девятку, семёрку с двойкой, тройку с шестёркой

$$84\overbrace{3\underbrace{7\dot{9}2}6}8,$$

а затем скажем: „восемь да четыре — двенадцать; один да два — три; три да восемь — одиннадцать; один да один — два“.

$$84\overbrace{3\underbrace{7\dot{9}2}6}8 \mid 2.$$

Ясно, что укороченное число всегда меньше девяти, так как, если в нём больше одной цифры, то их придётся сложить, а если получается девятка, то её выбрасываем, и тогда получаем нуль. Например:

$$\begin{array}{r|l} 243 & 0 \\ 7425 & 0. \end{array}$$

Вот дальнейшие примеры:

$$\begin{array}{r|l} 1828 & 1 \\ 10663 & 7 \\ 395072 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6285134 & 2 \\ 6666 & 6 \\ 147331 & 1. \end{array}$$

Кто хорошо напрактиковался в укорачивании чисел, тот, конечно, уже ничего не будет говорить вслух и не станет писать ничего лишнего, а сразу сосчитает в уме, поставит черточку справа и сейчас же за ней напишет укороченное число.

После некоторой тренировки укорачивание любого числа делается почти мгновенно и без всякого труда.

Основное свойство укороченных чисел

В то время, как над некоторыми числами совершается какое-нибудь арифметическое действие, над укороченными числами совершается то же самое действие — нужно только иметь в виду, что на-ходу следует производить укорачивание, выбрасывая (а иногда и добавляя) девятки.

Вот, например, сделано сложение трёх чисел, причём справа, за вертикальной чертой, рядом с каждым слагаемым и с суммой написаны укороченные числа:

$$\begin{array}{r|l} 3731 & 5 \\ +\;4285 & 1 \\ 2054 & 2 \\ \hline 10070 & 8 \end{array}$$

Проверьте, что при сложении укороченные слагаемые 5, 1 и 2 дают как раз укороченную сумму 8.

В следующем примере:

$$\begin{array}{r|l} +\;503 & 8 \\ 977 & 5 \\ \hline 1\,480 & 4, \end{array}$$

складывая укороченные слагаемые 8 и 5, получаем 13, или, после укорачивания, 4 — как раз укороченную сумму.

Рассмотрим ещё пример:

$$\begin{array}{r|l} 14\,590 & 1 \\ +\;7\,817 & 5 \\ 6\,497 & 8 \\ \hline 28\,904 & 5. \end{array}$$

Здесь при сложении укороченных слагаемых скажем: „один да восемь — девять, долой девятку; остаётся пять“: и как раз пять есть укороченная сумма.

Если под заданными числами проделано вычитание, то можно убедиться, что при вычитании укороченного вычитаемого из укороченного уменьшаемого получается укороченная разность:

$$\begin{array}{r|l} -\;214 & 7 \\ 119 & 2 \\ \hline 95 & 5. \end{array}$$

„Семь минус два — пять“.

При вычитании часто приходится добавлять девятку:

$$\begin{array}{r|l} -\;4\,071 & 3 \\ 1\,814 & 5 \\ \hline 2\,257 & 7. \end{array}$$

Из трёх нельзя вычесть пять; поэтому к трём добавим девятку, и из двенадцати вычтем пять: получается как раз семь.

Перейдём к умножению. Укоротим множимое, множитель и произведение, как это сделано ниже,

$$\begin{array}{r|l} \times\;\begin{array}{r}425\\291\end{array} & \begin{array}{l}2\\3\end{array}\\ \hline \begin{array}{r}425\\38\,25\;\;\\85\,0\;\;\;\;\end{array} & \\ \hline 123\,675 & 6\end{array}$$

и убедимся, что укороченные числа перемножаются, как сами данные: „дважды три — шесть“.

В примере

$$\begin{array}{r|l} \times\;\begin{array}{r}256\\53\end{array} & \begin{array}{l}4\\8\end{array}\\ \hline \begin{array}{r}768\\12\,80\;\;\end{array} & \\ \hline 13\,568 & 5\end{array}$$

придётся сказать: „четырежды восемь — тридцать два, или пять“. „Таблица умножения“ укороченных чисел несколько отличается от обыкновенной: „шестью семь — шесть“, „семью восемь — два“ и т. д. Тут не мешает и поупражняться.

Обратимся, наконец, к делению, с которым дело обстоит немного сложнее. Все знают очень твёрдо, что делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток. Подобное же соотношение существует и между укороченными числами. Например, при делении 808 на 65 получается частное 12 и остаток 28; итак,

$$808 = 65 \cdot 12 + 28.$$

Укороченные числа связаны между собой точно так же

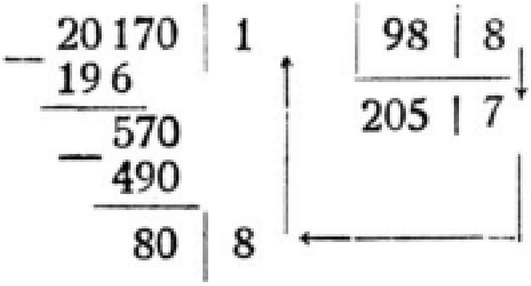
$$7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Действие можно расположить следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}808\\65\end{array} & 7\\ \cline{1-1} -\begin{array}{r}158\\130\end{array} & \\ \hline 28 & 1\end{array} \quad \begin{array}{c}\uparrow\\ \Big|\\ \longleftarrow\end{array} \quad \begin{array}{|r|l} 65 & 2\\ \hline 12 & 3\end{array}\;\downarrow$$

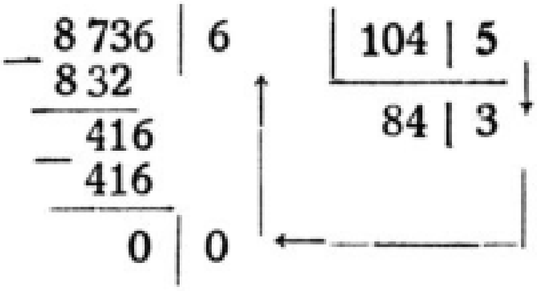
и говорить: „дважды три да один — семь“. Стрелочки показывают, в каком порядке следует брать укороченные числа.

В следующем примере



нужно будет сказать: „восемью семь — два, да восемь — один“.

В случае деления без остатка



можно сказать проще: „пятью три (подразумевается — да нуль) — шесть“.

Вы сделаете сколько захотите примеров на любое из арифметических действий, выбирая данные числа (слагаемые; уменьшаемое и вычитаемое; множимое и множитель; делимое и делитель) совершенно произвольно, и — если только не сделаете числовой ошибки при выполнении основного действия — соответствующее действие над укороченными числами[1] непременно сойдётся, как во всех приведённых выше примерах.

Напротив, если вдруг окажется, что действие над укороченными числами не сошлось, значит, где-то сделана числовая ошибка. Тогда придётся её поискать и найти. Таким образом, выполняя укороченное действие, вы можете обнаружить сделанную вами ошибку в основном действии: укороченное действие способно контролировать (проверять) основное[1].

---

[1] Говорите просто: „укороченное действие“.

Описанный здесь приём называется методом проверки с помощью девятки. Им удобно пользоваться для проверки тех действий, при выполнении которых возникающие, вследствие поспешности или рассеянности, ошибки происходят наиболее часто: таковы, во-первых, умножение и, во-вторых, сложение значительного числа слагаемых.

Иной раз с помощью девятки можно не только обнаружить, что имеется ошибка, но также и установить, в каком месте она произошла.

В следующем примере:

$$\begin{array}{r|l}
\times\ 389 & 2 \\
756 & 0 \\
\hline
2\,334 & \\
19\,45 & \\
252\,3 & \\
\hline
274\,084 & 7
\end{array}$$

проверка не сходится (так как „дважды нуль — нуль“, а не „семь“). Будем искать ошибку, и с этой целью укоротим частичные произведения:

$$\begin{array}{r|l}
\times\ 389 & 2 \\
756 & 0 \\
\hline
2\,334 & 3 \\
19\,45 & 1 \\
252\,3 & 3 \\
\hline
274\,084 & 7
\end{array}$$

---

[1] Из сказанного не вытекает, что, если укороченное действие сошлось, то основное действие выполнено правильно. Другими словами, указанным способом ошибки обнаруживаются, хотя и очень часто, но не всегда. Так, умножение

$$\begin{array}{r|l}
\times\ 417 & 3 \\
692 & 8 \\
\hline
834 & \\
37\,63 & \\
250\,2 & \\
\hline
287\,664 & 6
\end{array}$$

сделано неправильно, хотя укороченное действие сошлось. Поищите ошибку!

При умножении 389 на 6 получилось 2334; проверка даёт: „дважды шесть — три“. Сошлось: всё благополучно. При умножении 389 на 5 получилось 1945: „дважды пять — один“. Благополучно и здесь. При умножении на 7 получилось 2523: но „дважды семь — пять“, а не „три“. Очевидно, умножение на 7 сделано неверно: поищите ошибку и постарайтесь выяснить, в чём она заключалась.

Попробуйте сами проверить методом девятки следующие действия, и если они выполнены неверно, найдите ошибку.

$$
\begin{array}{r}
3\,189\\
+\;27\,063\\
817\\
15\,436\\
\hline
45\,505
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\;283\\
642\\
\hline
566\\
11\,32\;\\
177\,8\;\;\\
\hline
189\,686
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\;20\,075\\
1\,896\\
\hline
19\,179.
\end{array}
$$

Объяснение метода проверки девяткой

Достаточно ответить на два вопроса:

1) Что представляет собою укороченное число?

Укороченное число есть не что иное, как остаток от деления данного числа на 9. Этот остаток или равен сумме цифр данного числа, или получается из неё посредством выбрасывания девяток. В чём здесь дело — ясно из примера:

$$
\begin{aligned}
413 &= 4\cdot 100 + 1\cdot 10 + 3\\
&= 4\cdot(99+1) + 1\cdot(9+1) + 3\\
&= (4\cdot 99 + 1\cdot 9) + (4+1+3).
\end{aligned}
$$

Первая из скобок в последней строчке, очевидно, делится на 9.

2) Как объясняется основное свойство укороченных чисел?

Обратимся к первому из рассмотренных выше примеров на сложение. Если при делении на 9 слагаемые 3731, 4285 и 2054 дают остатки 5, 1 и 2, то вполне понятно, что их сумма даёт остаток $5+1+2=8$.

В более сложных случаях и для иных действий объяснение немногим сложнее.

Замечание о действиях с десятичными дробями.

Так как действия с десятичными дробями: сложение, вычитание, умножение и даже деление выполняются и располагаются совершенно так же, как и соответствующие действия с многозначными целыми числами (отличие — только в присутствии запятых), то проверка методом девятки применима и к действиям с десятичными дробями при условии, конечно, что эти действия выполнены точно, а не приближённо.

Упражнение 1

Дано шесть многозначных чисел, разбитых на две группы — по три числа в каждой группе. Умножить каждое число первой группы на каждое число второй группы с последующей проверкой методом девятки. Результаты записать на основном листе в виде двойной таблицы. Сами действия, вместе с проверкой, должны быть выполнены на вспомогательном листе, также с сохранением (по мере возможности) расположения в виде двойной таблицы.

Образец

Основной лист

Множители

		52	91	53
Множимые	28	1456	2548	1484
	13	676	1183	689
	46	2392	4186	2438

Вспомогательный лист

<table>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,28 & 1 \\ 52 & 7 \\ \hline 56 & \\ 140 & \\ \hline 1456 & 7 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,28 & 1 \\ 91 & 1 \\ \hline 28 & \\ 252 & \\ \hline 2548 & 1 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,28 & 1 \\ 53 & 8 \\ \hline 84 & \\ 140 & \\ \hline 1484 & 8 \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,13 & 4 \\ 52 & 7 \\ \hline 26 & \\ 65 & \\ \hline 676 & 1 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,13 & 4 \\ 91 & 1 \\ \hline 13 & \\ 117 & \\ \hline 1183 & 4 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,13 & 4 \\ 53 & 8 \\ \hline 39 & \\ 65 & \\ \hline 689 & 5 \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,46 & 1 \\ 52 & 7 \\ \hline 92 & \\ 230 & \\ \hline 2392 & 7 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,46 & 1 \\ 91 & 1 \\ \hline 46 & \\ 414 & \\ \hline 4186 & 1 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l} \times\,46 & 1 \\ 53 & 8 \\ \hline 138 & \\ 230 & \\ \hline 2438 & 8 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Методические замечания

1. Можно рекомендовать следующее расположение работы: основной лист — на левой странице полного разворота тетради, вспомогательный — на правой странице. Размеры всей таблицы на основном листе 20 клеточек × 20 клеточек, т. е. 5 клеточек × 5 клеточек для табличной клетки. Размеры таблицы на вспомогательном листе: в случае двузначных множителей 24 клеточки × 30 клеточек, т. е. 8 клеточек × 10 клеточек для табличной клетки; в случае трехзначных множителей 24 клеточки × 36 клеточек, т. е. 8 клеточек × 12 клеточек для табличной клетки. Естественно, чтобы размер таблиц и способ их подразделения на табличные клетки был заранее указан преподавателем.

2. Задавать исходные числа можно или двузначными (как в предыдущем образчике) или трёхзначными. Чтобы облегчить себе труд раздачи исходных данных, можно в случае двузначных чисел предложить учащимся: „Напишите из головы 12 каких попало цифр, одну за другой

(однако без нулей); разделив их на шесть групп по две цифры, получите шесть двузначных чисел. Три первых поместите в клетках заглавной строки; три последних — в клетках заглавного столбца". Если предусмотрены трёхзначные числа, придётся написать из головы не 12, а 18 цифр. Вполне возможно также и применение цифрового набора, причём предварительно можно удалить нули.

3. Предпочтительна взаимная проверка: каждый учащийся проверяет работу, скажем, своего соседа по скамье. Если же учащийся сделал проверку самостоятельно, то соседу останется проверить, правильно ли сделана проверка.

4. В порядке предварительной подготовки у доски необходимо прежде всего научить класс укорачивать числа, вызывая к доске одного учащегося за другим; затем упражнять в проверке различных действий. Дать или не дать объяснение методу проверки девяткой — зависит от обстоятельств и усмотрения преподавателя. Не дать объяснения не будет методической ошибкой, если учащиеся не требуют объяснения. Необходимо прежде выдачи упражнения 1 обстоятельно познакомить с расположением в виде двойной таблицы: для этого можно проделать подобное же упражнение у доски, предоставляя по очереди каждому вызванному выполнить одно действие с проверкой и записать результат в основную таблицу. При этом основная таблица помещается, например, на левой стороне доски и к концу урока постепенно заполнится; вызванный к доске учащийся выполняет своё действие на правой стороне и после проверки стирает его, чтобы освободить место для следующего.

5. Обстоятельства позволяют в процессе выполнения этой работы привлечь внимание учащихся к тому, насколько красиво и чётко они пишут цифры. Не слишком злоупотребляя на уроках математики каллиграфическими требованиями, всё же не излишне, если есть к тому основание, продемонстрировать на доске, каких не следует писать „цифр-уродов".

6. Наряду с проверкой умножения методом девятки преподаватель по своему усмотрению может ввести и графическую проверку, основанную на подобии треугольников. Способ графической проверки разъясняется чертежом 1 (см. стр. 24).

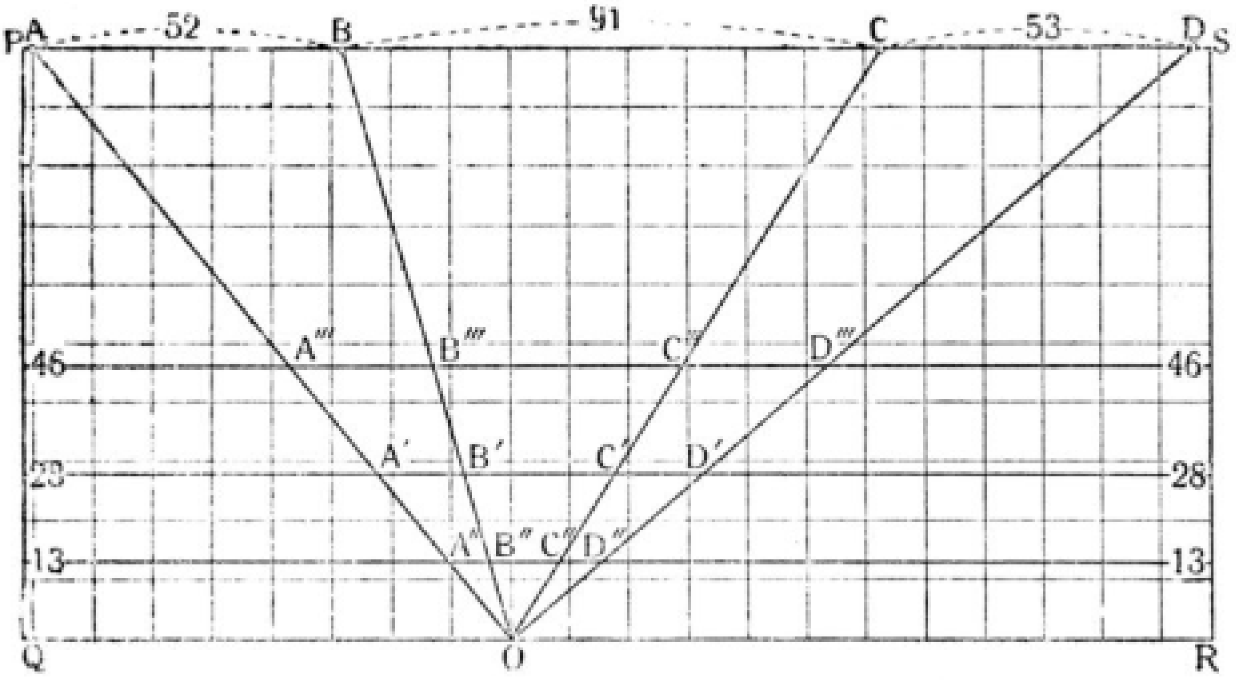


Чертёж 1

2. ПРОВЕРКА УМНОЖЕНИЯ ТАБЛИЧНЫМ МЕТОДОМ

Упражнение имеет в виду: 1) тренировать учащихся в умножении десятичных дробей, 2) закрепить применение записи в форме двойной таблицы, 3) познакомить с методом табличного контроля (основанного на дистрибутивном законе).

Предположим, что на один и тот же множитель, например, на 17, нужно было бы помножить целый ряд чисел, например, 8, 13, 25, 12 и 64. Результаты могли бы быть записаны в виде следующей простой таблички:

8	136
13	221
25	425
12	204
64	1088,

где в первом столбце помещены заданные множимые, во втором — соответствующие произведения.

Есть очень простой способ проконтролировать правильность произведённых умножений: сложим все множимые и все произведения и затем посмотрим, получится ли вторая сумма при умножении первой на данный множитель.

Просуммируем все числа, стоящие в первом столбце и все числа, стоящие во втором; затем умножим первую сумму на 17:

8	136
13	221
25	425
12	204
64	1088
122	2074

$$\begin{array}{r} 122\\ \times\ 17\\ \hline 854\\ 122\\ \hline 2074 \end{array}\ .$$

Мы видим, что произведение первой суммы 122 на 17 как раз равно второй сумме 2074: контроль сошёлся. В этом нет ничего удивительного: ведь на основании распределительного закона умножения непременно должно иметь место равенство

$$(8+13+25+12+64)\cdot 17=$$
$$=(8\cdot 17)+(13\cdot 17)+(25\cdot 17)+(12\cdot 17)+(64\cdot 17).$$

Следовательно, если бы контроль не сошёлся, то это не могло бы означать ничего другого, кроме того, что в вычислениях где-то была сделана ошибка[1].

Если производится умножение ряда чисел на каждое число из другого ряда чисел, причём результаты записаны в виде двойной таблицы, то проконтролировать можно каждый столбец в отдельности. Например, проведённый выше образчик Упражнения 1 (основной лист) контролируется следующим образом:

	52	91	53
28	1456	2548	1484
13	676	1183	689
46	2392	4186	2438
87	4524	7917	4611
	$\begin{array}{r}87\\ \times\ 52\\ \hline 174\\ 435\\ \hline 4524\end{array}$	$\begin{array}{r}87\\ \times\ 91\\ \hline 87\\ 783\\ \hline 7917\end{array}$	$\begin{array}{r}87\\ \times\ 53\\ \hline 261\\ 435\\ \hline 4611\end{array}$

---

[1] Как и в других подобных случаях, если контроль сходится, то это, строго говоря, не значит, что действие наверное сделано правильно, но позволяет судить об этом с некоторой уверенностью.

Замечание 1. Стоит отметить, что показанный здесь метод табличного контроля годится не только в том случае, когда все данные числа — целые положительные: эти числа могут быть какие угодно. Он годится и в том случае, когда основные действия выполнены приближенно: но в этом случае и контроль сойдётся не вполне точно, а приближённо (способ девятки в этом случае, конечно, отпадает).

Замечание 2. Приёмы контроля, подобные предыдущему, возможно применять и в тех случаях, когда приходится к ряду чисел прибавлять (или от ряда чисел отнимать) одно и то же число, или, наконец, ряд чисел делить на одно и то же число. Легко сообразить, как в каждом из этих случаев должен быть видоизменён приём контроля. Вот два примера с выполненным контролем.

Сложение с 17

8	25
13	30
25	42
12	29
64	81
122	207

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}17\\5\end{array}\\ \hline 85\\ +\,122\\ \hline 207.\end{array}$$

Деление на 17 (в десятичных дробях, с недостатком)

8	0,47
13	0,76
25	1,47
12	0,70
64	3,76
122	7,16

$$\begin{array}{r|l} -122 & 17\\ \cline{2-2} 119 & 7,17\\ \cline{1-1} -\;30 & \\ 17 & \\ \cline{1-1} 130 & \\ \ldots & \end{array}$$

Упражнение 2

Дано шесть десятичных дробей, разбитых на две группы — по три дроби в каждой группе. Умножить каждую дробь первой группы на каждую дробь второй группы, с последующей табличной проверкой посредством суммирования по столбцам. Результаты записывать на основном листе в виде двойной таблицы; там же, под таблицей — суммы, составленные по столбцам. Сами действия, как основные, так и контрольные, должны быть выполнены на вспомогательном листе с сохранением (по мере возможности) расположения в виде двойной таблицы. В случае, если табличная проверка не сходится, искать ошибку методом девятки.

Образец

Основной лист

Множители

Множимые	6,1	90,2	630
1,7	10,37	153,34	1071
2,05	12,505	184,91	1291,5
0,029	0,1769	2,6158	18,27
3,779	23,0519	340,8658	2380,77

Вспомогательный лист

$\begin{array}{r} 1{,}7 \\ \times\ 6{,}1 \\ \hline 17 \\ 102 \\ \hline 10{,}37 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1{,}7 \\ \times\ 90{,}2 \\ \hline 34 \\ 153 \\ \hline 153{,}34 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1{,}7 \\ \times\ 630 \\ \hline 51 \\ 102 \\ \hline 1071 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2{,}05 \\ \times\ 6{,}1 \\ \hline 205 \\ 12\ 30 \\ \hline 12{,}505 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2{,}05 \\ \times\ 90{,}2 \\ \hline 410 \\ 184\ 5 \\ \hline 184{,}91 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2{,}05 \\ \times\ 630 \\ \hline 615 \\ 1230 \\ \hline 1291{,}5 \end{array}$
$\begin{array}{r} 0{,}029 \\ \times\ 6{,}1 \\ \hline 29 \\ 174 \\ \hline 0{,}1769 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0{,}029 \\ \times\ 90{,}2 \\ \hline 58 \\ 2\ 61 \\ \hline 2{,}6158 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0{,}029 \\ \times\ 630 \\ \hline 87 \\ 174 \\ \hline 18{,}27 \end{array}$

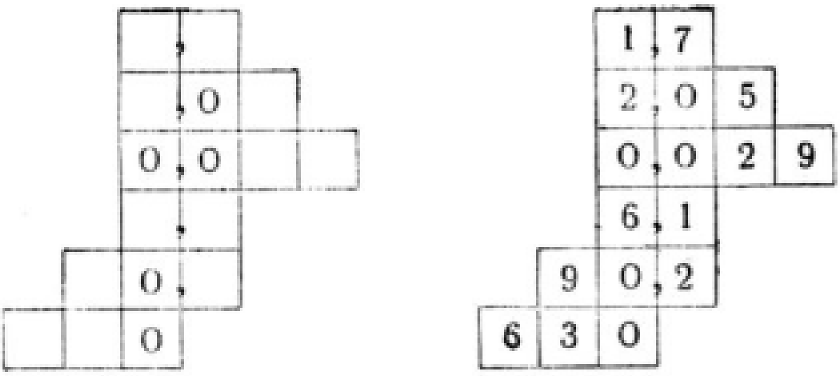
Контрольные действия

3,779	3,779	3,779
× 6,1	× 90,2	× 630
3779	7558	113 37
22 674	340 11	2267 4
23,0519	340,8658	2380,77

Методические замечания

1. Расположение работы такое же, как в упражнении 1. Размеры таблицы на основном листе 20 клеточек × 20 клеточек. Размеры таблицы на вспомогательном листе 24 клеточки × 30 клеточек и контрольные вычисления 24 клеточки × 10 клеточек.

2. Распределение данных лучше всего производить с помощью цифрового набора (без нулей). Полученные им 12 карточек с цифрами каждый учащийся располагает в порядке строчек на заранее приготовленном трафарете. Перед раздачей карточек преподаватель рисует трафарет на доске и предлагает всем срисовать (чертёж 2).



Трафарет до распределения на нём карточек

Тот же трафарет после распределения на нём карточек с цифрами 172529619263

Чертёж 2.

На трафарете заранее поставлены нули и запятые. Разложив свои карточки на свободных клеточках трафарета, каждый учащийся по строчкам трафарета получает шесть чисел (десятичных дробей), из которых три первых возьмёт в качестве множимых и напишет их в заглавном столбце, три последних возьмёт в качестве множителей и напишет их в заглавной строке.

При размере карточек цифрового набора 2 клеточки × 2 клеточки — можно рекомендовать размеры клеточки трафарета 3 клеточки × 3 клеточки.

3. Табличная проверка производится самим учащимся. Преподаватель объявляет заранее, что в случае, если табличная проверка не сходится, каждый учащийся должен искать ошибку, пока её не найдёт; при поисках ошибки рекомендуется пользоваться методом девятки.

4. Необходимы предварительные упражнения с табличной проверкой двойных таблиц в форме коллективной работы у доски (см. Упражнение 1), желательны также краткосрочные (15—20 мин.) классные письменные работы-репетиции. Весьма существенно на основном листе писать числа строго по правилу „разряд под разрядом“, единицы под единицами, десятки под десятками и т. д.; но нужно полагать, что работа заставит писать именно так, даже если преподаватель и не сделает предварительного предупреждения. Названное правило в приведённом образчике соблюдается и на вспомогательном листе; но педантически требовать от учащихся соблюдения этого правила на вспомогательном листе необязательно. При предварительных упражнениях не стоит уделять много времени сложению и вычитанию: разве лишь интересно предложить учащимся придумать метод табличного контроля. Что касается деления, то ему посвящается следующее Упражнение 3.

3. ПРЕВРАЩЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ В ДЕСЯТИЧНЫЕ

(Два варианта: вариант A — с разложением на простые множители, вариант B — упрощенный, без разложения на множители).

Упражнение имеет в виду: 1) закрепить навык превращения обыкновенных дробей в десятичные, 2) тренировать в округлении с назначенным числом десятичных знаков, 3) упрочить приём записи в форме двойной таблицы и проверки табличным методом. Помимо того, вариант A направляет внимание к разложению чисел на множители и приучает пользоваться показателями степени.

Известно, что всякое целое положительное число единственным образом может быть представлено в виде произведения простых множителей. Известен также приём разложения „столбиком“; например, мы пишем „столбик“:

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

и потом подводим итог следующим образом:

$$2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

В дальнейшем, следуя правилам алгебры, мы не станем писать несколько раз один и тот же множитель, а будем постоянно пользоваться показателями степени; поэтому предыдущий итог запишем в форме:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Порядок, в котором следуют простые множители, не совсем безразличен: примем за правило выписывать их всегда в порядке возрастания.

Если требуется разделить, скажем, 2520 на 528, то точный результат представляется в виде дроби:

$$\frac{2520}{528}.$$

Однако эту дробь никак не следует оставлять такой, как она написана: необходимо попытаться её, насколько возможно, сократить, и чтобы сделать это сразу (а не последовательными шагами), необходимо знать разложение числителя и знаменателя на множители. Так как

$$528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11,$$

то $$\frac{2520}{528} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{105}{22}.$$

Числа 105 и 22 уже не имеют общих множителей, и потому дальнейшее сокращение невозможно. Всё же дробь $\frac{105}{22}$ выглядит недостаточно вразумительно: чтобы легче было сравнивать по величине дроби с различными знаменателями, принято обыкновенно обращать их в десятичные, — и если нельзя этого сделать точно, то округляют дробь, ограничиваясь тем или иным числом знаков после запятой.

В нашем примере деление числителя на знаменатель даёт:

$$\begin{array}{r|l} -105 & 22 \\ \underline{88} & \overline{4,77} \\ -170 & \\ \underline{154} & \\ -160 & \\ \underline{154} & \\ 6 & \end{array}$$

и, не продолжая деления, можно написать приближённое равенство:

$$\frac{105}{22} \sim 4,77.$$

Тот же результат получился бы, если бы, не производя сокращения, мы стали бы делить сразу 2520 на 528. Но в данном случае, конечно, удобнее было сначала сократить.

Необходимо с особенным вниманием отнестись к правилам округления чисел.

Эти правила сводятся к двум основным.

Если, например, имеют в виду сохранить два знака после запятой, то округляют, как принято говорить, до ближайшей сотой, или, короче, в сотых[1]. Это значит, что рассматриваемое число заменяют той из двух ближайших десятичных дробей (с двумя знаками после запятой), которая меньше отличается от рассматриваемого числа.

Отсюда вытекает первое правило:

При округлении числа, представленного в виде десятичной дроби, оно округляется с недостатком, т. е. последняя сохраняемая цифра оставляется неизменной, если первая отбрасываемая меньше пяти; и округляется с избытком (т. е. последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу), если первая отбрасываемая цифра больше пяти или равна пяти (при этом предполагается, что в последнем случае пятёрка не является последним десятичным знаком).

---

[1] Подразумевается: „в сотых долях единицы".

Так, при округлении с двумя знаками после запятой (в сотых) вместо

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$$

нужно взять 0,33:

$$\frac{1}{3}\sim 0{,}33;$$

но вместо

$$\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$$

нужно взять 0,67:

$$\frac{2}{3}\sim 0{,}67.$$

Второе правило относится к сомнительному случаю, когда единственный отбрасываемый десятичный знак равен пяти. При этом отклонения рассматриваемого числа от числа, округленного с недостатком, и от числа, округленного с избытком, одинаковы, и чтобы избавить себя от колебаний в каждом случае, обыкновенно принимают так называемое „правило чётной цифры“.

При отбрасывании единственного десятичного знака, если этот знак пятёрка, округляют на чётную цифру, т. е. оставляют последнюю сохраняемую цифру неизменной, если она чётная, и увеличивают на единицу, если она нечётная.

Так, при округлении с двумя знаками после запятой (в сотых) согласно этому правилу получается:

$$\frac{133}{200}=0{,}665\sim 0{,}66;$$

но

$$\frac{67}{200}=0{,}335\sim 0{,}34.$$

Если нужна бо́льшая точность, то округляют в тысячных, в десятитысячных и т. д.; если нужна меньшая точность, то округляют в десятых, а иногда и в единицах („в целых числах“). По указанным выше правилам нередко округляют и целые многозначные числа (реже в десятках, в сотнях, гораздо чаще в тысячах), заменяя, конечно, отбрасываемые цифры нулями. Отбрасываемые цифры необходимо заменять нулями и при округлении десятичных дробей — если после округления число знаков после запятой оказывается меньше назначенного. Например, при округлении в сотых следует писать

$$2{,}5997 \sim 2{,}60,$$

тогда как запись

$$2{,}5997 \sim 2{,}6$$

была бы неправильной.

Следующая двойная таблица иллюстрирует округление чисел в самых разнообразных случаях.

Вид округления	Данные числа			
	248,49276	1032,28135	27,55555	9504,35
С четырьмя знаками после запятой (в десятитысячных)	248,4928	1032,2814	27,5556	9504,3500
С тремя знаками после запятой (в тысячных) . . .	248,493	1032,281	27,556	9504,350
С двумя знаками после запятой (в сотых)	248,49	1032,28	27,56	9504,35
С одним знаком после запятой (в десятых) . . .	248,5	1032,3	27,6	5904,4
В целых числах (в единицах)	248	1032	28	9504
В десятках	250	1030	30	9500
В сотнях	200	1000	0	9500

Приобретение правильных навыков в округлении чисел имеет громадное значение для всякого, кто имеет дело с многозначными числами или дробями, если он хочет вести вычисления аккуратно и сберечь свой труд.

Замечание. Если десятичная дробь возникает в процессе деления одного числа на другое, то по большей части нет необходимости устанавливать ту цифру частного, которая будет первой отбрасываемой при округлении. Достаточно посмотреть, меньше или больше полученный остаток, чем половина делителя. Так, в приведенном примере деления 105 на 22 остаток 6 меньше половины делителя 22, и потому, останавливаясь на втором знаке, округляем с недостатком:

$$\frac{105}{22} \sim 4{,}77.$$

Но если бы мы хотели остановиться на первом знаке, то остаток был бы 16 — больше, чем половина 22, и, следовательно, округлить пришлось бы с избытком:

$$\frac{105}{22} \sim 4{,}8.$$

Упражнение 3 (вариант *А*)

Дано восемь целых чисел, разбитых на две группы, по четыре числа в каждой группе. Шестнадцать обыкновенных дробей, получающихся, если взять в качестве числителя каждое из чисел первой группы, а в качестве знаменателя — каждое из чисел второй группы, требуется подвергнуть сокращению, предварительно разлагая числитель и знаменатель на простые множители (с применением показателей), и затем превратить в десятичные дроби, с округлением в сотых (с двумя знаками после запятой). Сделать проверку табличным методом посредством суммирования по столбцам.

На основном листе дать двойную таблицу с результатами в виде сокращённых обыкновенных и округлённых десятичных дробей, с подведением сумм по столбцам.

На вспомогательных листах (их может быть и несколько) расположить в определённом порядке:

1) все вычисления, связанные с сокращением дробей,
2) обращение обыкновенных дробей в десятичные,
3) контрольные действия.

Образец

Основной лист

Знаменатели

Числители

	$585 = 3^2\cdot 5\cdot 13$	$636 = 2^2\cdot 3\cdot 53$	$680 = 2^3\cdot 5\cdot 17$	$54 = 2\cdot 3^3$
$243 = 3^5$	$\frac{27}{65}=0{,}42$	$\frac{81}{212}=0{,}38$	$\frac{243}{680}=0{,}36$	$\frac{9}{2}=4{,}50$
$510 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 17$	$\frac{34}{39}=0{,}87$	$\frac{85}{106}=0{,}80$	$\frac{3}{4}=0{,}75$	$\frac{85}{9}=9{,}44$
$558 = 2\cdot 3^2\cdot 31$	$\frac{62}{65}=0{,}96$	$\frac{93}{106}=0{,}88$	$\frac{279}{340}=0{,}82$	$\frac{31}{3}=10{,}33$
$405 = 3^4\cdot 5$	$\frac{9}{13}=0{,}69$	$\frac{135}{212}=0{,}64$	$\frac{81}{136}=0{,}60$	$\frac{15}{2}=7{,}50$
1716	2,94	2,70	2,53	31,77

Вспомогательный лист

$$\frac{243}{585}=\frac{3^5}{3^2\cdot 5\cdot 13}=\frac{3^3}{5\cdot 13}=\frac{27}{65}$$

$$\frac{243}{636}=\frac{3^5}{2^2\cdot 3\cdot 5}=\frac{3^4}{2^2\cdot 5}=\frac{81}{212}$$

$$\frac{243}{680}\quad \text{(не сокращается)}$$

$$\frac{243}{54}=\frac{3^5}{2\cdot 3^3}=\frac{3^2}{2}=\frac{9}{2}$$

$$\frac{510}{585}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}{3^2\cdot 5\cdot 13}=\frac{2\cdot 17}{3\cdot 13}=\frac{34}{39}$$

. . . .

и т. д. вплоть до

$$\frac{405}{54}=\frac{3^4\cdot 5}{2\cdot 3^3}=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 27{,}0 & 65 \\ \underline{260} & 0{,}42 \\ 100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 81{,}0 & 212 \\ \underline{636} & 0{,}38 \\ 1740 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 243{,}0 & 680 \\ \underline{204{,}0} & 0{,}36 \\ 3900 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 34{,}0 & 39 \\ \underline{312} & 0{,}87 \\ 280 & \end{array}$$

. . . .

Контрольные действия

1716 | 585 1170 2,93 5460 5265 1950 1755 195	1716 | 636 1272 2,69 4440 2,70 3816 6240 5724 516	1716 | 680 1360 2,52 3560 3400 160	1716 | 54 162 31,78 96 54 420 378 420

Методические замечания

1. Если учащийся затрудняется произвести в уме сокращение дроби, у которой числитель и знаменатель разложены на множители, следует предложить ему переписать степени как произведения одинаковых множителей и производить сокращения, как учит арифметика. Правила действий с показателями будут объяснены позднее в алгебре.

2. Если преподавателю трудно вменить в обязанность проверить правильность округлений во всех работах, то всё же можно порекомендовать ему не относиться терпимо к замеченным погрешностям и внимательно следить за округлениями при работе у доски.

Полезны предварительные упражнения у доски того же содержания, что и само упражнение 3, но облегчённые по характеру и объёму, зато с округлениями в разных разрядах. Пример:

а) в десятых

	7	19
3	0,4	0,2
11	1,6	0,6
27	3,9	1,4

б) в сотых

	7	19
3	0,43	0,16
11	1,57	0,58
27	3,86	1,42

в) в тысячных

	7	19
3	0,429	0,158
11	1,571	0,579
27	3,857	1,421

г) в десятитысячных

	7	19
3	0,4286	0,1579
11	1,5714	0,5789
27	3,8571	1,4211

3. Раздача данных для упражнения 3 (вариант *А*) производится, чтобы обеспечить большое число возможных сокращений с помощью особого набора из карточек, на которых написаны числа в пределах тысячи, содержащие не менее четырёх простых множителей. Эти числа указываются ниже в „Приложении“. Их всего 285, и при распределении по 8 карточек класс из 35 учащихся будет обеспечен. Если учащихся в классе больше, то число карточек свободно можно дублировать.

4. При выполнении контроля придётся встречаться с небольшими текущими погрешностями. Выходят ли они за допустимые пределы — об этом судить преподавателю не представит труда.

5. В той или иной степени обязательны предварительные упражнения у доски в разложении чисел на множители. Пользуясь хотя бы „Приложением“, преподаватель выписывает ряд чисел на доске, а затем вызывает учащихся одного за другим, предлагая делать по одному примеру. Легко отдать себе отчёт в том, что затруднение при разложении на множители чисел, взятых из „Приложения“, не возникнет, и учащемуся достаточно знать признаки делимости на 2, на 3 и на 5 (одно исключение — число 686).

Список чисел, не превышающих 1000 и разлагающихся на большое число простых множителей[1].

На 9 множителей разлагаются только 2 числа: 512 и 768.

На 8 множителей разлагаются 7 чисел: 256, 384, 576, 640, 864, 896 и 960.

На 7 множителей разлагаются 14 чисел:
128, 192, 288, 320, 432, 448, 480, 648, 672, 704, 720, 800, 832 и 972.

На 6 множителей разлагаются 37 чисел:

64, 96, 144, 160, 216, 224, 240, 324, 336, 352, 360, 400, 416, 486, 504, 528, 540, 544, 560, 600, 608, 624, 729, 736, 756, 784, 792, 810, 816, 840, 880, 900, 912, 928, 936, 992 и 1000.

На 5 множителей разлагаются 76 чисел:

32, 48, 72, 80, 108, 112, 120, 162, 168, 176, 180, 200, 208, 243, 252, 264, 270, 272, 280, 300, 304, 312, 368, 378, 392, 396, 405, 408, 420, 440, 450, 456, 464, 468, 496, 500, 520, 552, 567, 580, 592, 594, 612, 616, 630, 656, 660, 675, 680, 684, 688, 696, 700, 702, 728, 744, 750, 752, 760, 780, 828, 848, 882, 888, 891, 918, 920, 924, 944, 945, 952, 968, 976, 980, 984 и 990.

На 4 множителя разлагаются 149 чисел:

16, 24, 36, 40, 54, 56, 60, 81, 84, 88, 90, 100, 104, 126, 132, 135, 136, 140, 150, 152, 156, 184, 189, 196, 198, 204,

---

[1] Настоящее „Приложение" приведено здесь по той причине, что не у всякого преподавателя найдётся под рукой таблица разложения трёхзначных чисел на простые множители. Такая чрезвычайно полезная в практике преподавания таблица была в своё время опубликована журналом „Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики" (см. также „Теорию чисел" проф. И. В. Арнольда). Составить такую таблицу нетрудно, но требует времени. Вместе с тем составление этой таблицы — дело очень полезное и для учащихся. При наличии некоторого избытка времени такая таблица могла бы быть создана усилиями коллектива учащихся V—VI классов данной школы и могла бы обслуживать школу в дальнейшем. Если бы работу распределить между 100 учащимися, то каждому досталось бы по десятку чисел. Или в один учебный год можно составить таблицу от 1 до 500, а в следующий — от 501 до 1000. Если не сам преподаватель, то более усердные ученики взяли бы на себя контроль за множителями 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и 31. Плодотворно было бы соревнование двух коллективов.

210, 220, 225, 228, 232, 234, 248, 250, 260, 276, 294, 296, 297, 306, 308, 315, 328, 330, 340, 342, 344, 348, 350, 351, 364, 372, 375, 376, 380, 390, 414, 424, 441, 444, 459, 460, 462, 472, 476, 484, 488, 490, 492, 495, 510, 513, 516, 522, 525, 532, 536, 546, 550, 558, 564, 568, 570, 572, 580, 584, 585, 620, 621, 625, 632, 636, 644, 650, 664, 666, 676, 686, 690, 693, 708, 712, 714, 726, 732, 735, 738, 740, 748, 765, 770, 774, 776, 783, 798, 804, 808, 812, 819, 820, 824, 825, 836, 837, 846, 850, 852, 855, 856, 858, 860, 868, 870, 872, 875, 876, 884, 904, 910, 930, 940, 948, 950, 954, 966, 975, 988, 996 и 999.

Упражнение 3 (вариант *В*)

Дано шесть трёхзначных чисел, разбитых на две группы, по три числа в каждой группе. Девять обыкновенных дробей, получающихся если взять в качестве числителя каждое из чисел первой группы, а в качестве знаменателя — каждое из чисел второй группы, предлагается превратить в десятичные дроби, с округлением в сотых (с двумя знаками после запятой). Сделать проверку табличным методом — посредством суммирования по столбцам.

На основном листе дать двойную таблицу с результатами и с подведением сумм по столбцам. На вспомогательном листе, по мере возможности также в форме двойной таблицы, расположить деления, а также контрольные действия.

Методические замечания

1. Распределение данных может быть произведено или с помощью обыкновенного цифрового набора или с помощью набора карточек с числами от 1 до 1000. В первом случае каждому учащемуся полагается по 18 карточек, во втором — по 6.

2. Предварительные сокращения не рекомендуются, но и не запрещаются.

3. Пункты 2 и 5 методических замечаний к варианту *А* остаются в силе.

Преподаватель сделает выбор между вариантами *А* и *В* в зависимости от обстоятельств.

4. СОКРАЩЁННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Упражнение имеет в виду: 1) приучить не писать лишних цифр при умножении многозначных чисел, 2) закрепить навык применения табличного контроля.

Очень часто бывает так, что действия (умножение и деление), производимые над десятичными дробями согласно обычным правилам арифметики, приводят к результатам, содержащим большее число знаков, чем это требуется по условию задачи.

Если нужно умножить 0,849 на 3,725, причём заранее сказано, что в произведении достаточно знать три цифры после запятой, то можно, конечно, произвести умножение в обычном расположении

$$\begin{array}{r:l}
\times\ 0{,}849 & \\
3{,}725 & \\
\hline
4 & 245 \\
16 & 98 \\
594 & 3 \\
2547 & \\
\hline
3{,}162 & 525
\end{array}$$

и затем округлить результат в тысячных; получится:

$$0{,}849 \times 3{,}725 \sim 3{,}163.$$

Однако ясно видно, что здесь была произведена лишняя работа: по существу всё, что стоит правее вертикального пунктира, вовсе не нужно.

Посмотрим, как нужно рассуждать, чтобы не писать лишних цифр.

Мы могли бы сказать: „нас интересует, сколько будет тысячных в произведении. Тысячные могут получиться от умножения: 1) тысячных на единицы, 2) сотых на десятые, 3) десятых на сотые, 4) единиц на тысячные. В нашем примере: 1) множимое всего содержит 849 тысячных, от умножения их на 3 единицы во множителе получится 2547 тысячных; 2) множимое содержит всего (округляя) 85 сотых, от умножения их на 7 десятых во множителе получится 595 тысячных; 3) множимое содержит всего (округляя) 8 десятых, от умножения их на 2 сотых во множителе получится 16 тысячных; 4) наконец, множимое содержит (округляя) всего одну единицу, от умножения её на 5 тысячных множителя получится 5 тысячных. Итого, в произведении содержится $2547 + 595 + 16 + 5 = 3163$ тысячных, т. е. произведение приближённо равно 3, 163". Такое рассуждение привело бы к записи

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}849\\ 3{,}725 \end{array}\\ \hline 2\,547\\ 595\\ 16\\ 5\\ \hline 3{,}163 \end{array},$$

которая перед прежней имеет несомненное преимущество краткости; здесь выгодно и то, что частные произведения выписываются в порядке их убывания, тогда как при обыкновенном расположении действия (если поставить нули на пустые места) видно, что они идут в порядке возрастания, т. е. начиная с самых ничтожных.

Далее запись может быть ещё улучшена, если переставить в обратном порядке цифры множителя:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}849\\ 5\,273 \end{array}\\ \hline 2\,547\\ 595\\ 16\\ 5\\ \hline 3{,}163 \end{array}$$

При такой перестановке ясно видно, что нужно умножать на каждую цифру множителя: на 3 умножаем 849, на 7 умножаем 84 (или, округляя по правилам, 85), на 2 умножаем 8, на 5 умножаем 0 (или, округляя по правилам, 1).

Внесём, наконец, ещё одно весьма существенное усовершенствование. Действие, разумеется, будет выполнено более точно, если упомянутые только что округления умножаемых чисел мы будем производить не в единицах, а в десятых. Так, например, на 7 будем умножать не 84, но и не 85, а 84,9; на 2 — не 8, но и не 9, а 8,4; на 5 — не 0, но и не 1, а 0,8. Другими словами, будем „принимать во внимание" лишний следующий знак.

Мы скажем: „На 3 умножаем 849, получается 2547“. Пишем 2547 под чертой. Затем проводим вертикальную черту, вправо от которой будем принимать во внимание один знак

$$\begin{array}{rr|l} \times & 0{,}84 & 9 \\ & 527 & 3 \\ \hline & 254 & 7 \end{array}$$

Продолжаем: „На 7 умножаем 84, но примем во внимание 9. Семью девять — шестьдесят три: это составляет (округляем) шесть десятков. Семью четыре — двадцать восемь, да шесть — тридцать четыре“ (пишем четвёрку под семёркой) и т. д. Возникает новое частное произведение 594, которое подписывается под прежним без сдвига влево. Проводим следующую вертикальную черту

$$\begin{array}{rr|c|l} \times & 0{,}8 & 4 & 9 \\ & 52 & 7 & 3 \\ \hline & 25 & 4 & 7 \\ & 5 & 9 & 4 \end{array}$$

„На 2 нужно умножать 8, но 4 примем во внимание. Дважды четыре — восемь: это составляет (округляем) один десяток. Дважды восемь — шестнадцать, да один — семнадцать“ (пишем семёрку под четвёркой, единицу под девяткой). Проводим ещё вертикаль

$$\begin{array}{r|c|c|l} 0, & 8 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 4 & 7 \\ & 5 & 9 & 4 \\ & & 1 & 7 \end{array}$$

„На пять умножать уже нечего; но восьмёрку все-таки примем во внимание. Пятью восемь — сорок: это — четыре десятка“ (пишем четвёрку под семёркой). Остаётся складывать и затем в сумме отделить запятой три знака.

Законченное действие имеет вид:

$$\begin{array}{r|c|c|c}
\times\ 0, & 8 & 4 & 9\\
5 & 2 & 7 & 3\\
\hline
2 & 5 & 4 & 7\\
 & 5 & 9 & 4\\
 & & 1 & 7\\
 & & & 4\\
\hline
3, & 1 & 6 & 2
\end{array}$$

Мы убеждаемся, что частные произведения здесь как раз те самые, какие получились бы из частных произведений при обычном расположении действия, если, отбрасывая то, что стоит вправо от пунктира, произвести правильные округления. Добиваться лучшего результата было бы излишним.

Сформулируем окончательно правило сокращённого умножения[1]:

Следует: 1) отметить во множимом (например, звёздочкой) цифру, соответствующую заранее назначенному разряду[2], 2) под ней написать цифру, обозначающую число единиц множителя; все остальные цифры множителя написать в обратном порядке, 3) составлять частные произведения, умножая на каждую цифру множителя лишь ту часть множимого, которая стоит левее от вертикальной черты, проведённой непосредственно справа от той цифры, на которую умножаем[3], и „принимая во внимание“ первую цифру после черты; частные произведения выписывать, не сдвигая их ступенями влево, 4) в сумме частных произведений поставить запятую так, как заранее назначено.

---

[1] Это правило было у нас известно ещё встарину под именем „правила Утрехта“ (Утрехт — William Oughtred).

[2] Т. е. третью справа от запятой, если в результате нужно иметь три знака после запятой; вторую — если нужно иметь два знака; первую — если один; первую слева от запятой, если нужно округлить результат в единицах, и т. д.

[3] После приобретения некоторого навыка черту можно проводить мысленно, т. е. не проводить на бумаге.

Упражнение 4

Даны семь десятичных дробей, разбитых на две группы; в первой — три, во второй — четыре дроби. Составить 12 возможных произведений каждой дроби первой группы на каждую дробь второй. При этом пользоваться правилом сокращённого умножения, ведя действие с двумя знаками после запятой. Сделать табличную проверку.

Результаты записывать на основном листе, как обычно, в двойной таблице; также подводить суммы по столбцам. На вспомогательном листе расположить сами основные действия и контрольные умножения (выполняя тем же сокращённым методом).

Образец

Основной лист

		Множители			
		0,766	0,841	0,542	0,037
Множимые	2,473	1,88	2,08	1,34	0,08
	3,517	2,69	2,95	1,91	0,13
	4,905	3,74	4,12	2,66	0,18
	10,895	8,32	9,15	5,91	0,39

Вспомогательный лист

$\begin{array}{r} \times\ 2{,}4\overset{*}{7}3 \\ 66\ 70 \\ \hline 1\ 73 \\ 14 \\ 1 \\ \hline 1{,}88 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 2{,}4\overset{*}{7}3 \\ 14\ 80 \\ \hline 1\ 98 \\ 10 \\ \hline 2{,}08 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 2{,}4\overset{*}{7}3 \\ 24\ 50 \\ \hline 1\ 24 \\ 10 \\ \hline 1{,}34 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 2{,}4\overset{*}{7}3 \\ 73\ 00 \\ \hline 7 \\ 1 \\ \hline 0{,}08 \end{array}$
$\begin{array}{r} \times\ 3{,}5\overset{*}{1}7 \\ 66\ 70 \\ \hline 2\ 46 \\ 21 \\ 2 \\ \hline 2{,}69 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 3{,}5\overset{*}{1}7 \\ 14\ 80 \\ \hline 2\ 81 \\ 14 \\ \hline 2{,}95 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 3{,}5\overset{*}{1}7 \\ 24\ 50 \\ \hline 1\ 76 \\ 14 \\ 1 \\ \hline 1{,}91 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 3{,}5\overset{*}{1}7 \\ 73{,}00 \\ \hline 11 \\ 2 \\ \hline 0{,}13 \end{array}$
$\begin{array}{r} \times\ 4{,}9\overset{*}{0}5 \\ 66\ 70 \\ \hline 3\ 43 \\ 29 \\ 2 \\ \hline 3{,}74 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 4{,}9\overset{*}{0}5 \\ 14\ 80 \\ \hline 3\ 92 \\ 20 \\ \hline 4{,}12 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 4{,}9\overset{*}{0}5 \\ 24\ 50 \\ \hline 2\ 45 \\ 20 \\ 1 \\ \hline 2{,}66 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 4{,}9\overset{*}{0}5 \\ 73\ 00 \\ \hline 15 \\ 3 \\ \hline 0{,}18 \end{array}$

Контроль

$\begin{array}{r} \times\ 10{,}8\overset{*}{9}5 \\ 66\ 70 \\ \hline 7\ 62 \\ 65 \\ 6 \\ \hline 8{,}33 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 10{,}8\overset{*}{9}5 \\ 14\ 80 \\ \hline 8\ 71 \\ 43 \\ 1 \\ \hline 9{,}15 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 10{,}8\overset{*}{9}5 \\ 24\ 50 \\ \hline 5\ 45 \\ 43 \\ 2 \\ \hline 5{,}90 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 10{,}8\overset{*}{9}5 \\ 73\ 00 \\ \hline 32 \\ 7 \\ \hline 0{,}39 \end{array}$

Методические замечания

1. Правило сокращённого умножения имеет очень ограниченную общепознавательную ценность. Оно мало пригодно для развития интеллекта учащегося. Всё значение этого приёма умножения — в его весьма высокой практической ценности. Тот, кто усвоил механизм сокращённого умножения, тем самым сообразит, как „объясняется“ или „выводится“ само правило. Хотя мы не отка-

зались в предыдущем изложении указать на индуктивной основе отдельные этапы усовершенствования обычного приёма, которые в итоге приводят к описываемому приёму, всё же спешим заявить, что догматический подход к делу в данном случае представляется мало опасным. Словом, не стоит слишком углубляться в теорию правила сокращенного умножения; зато поспешим усвоить его практически.

2. Однако это практическое усвоение, несомненно, подразумевает некоторое индивидуальное усилие со стороны учащегося. Нужна достаточная тренировка для того, чтобы научиться делать умножение не по старой привычке: этой цели и служит Упражнение 4. Но полное овладение методом, возможно, придёт гораздо позднее в связи с дальнейшими упражнениями.

3. Целесообразно в Упражнении 4 давать учащимся однотипные дроби: один знак слева от запятой, три — справа. Итого: $4 \times 7 = 28$ цифр, которые легко распределяются с помощью цифрового набора. При таких условиях главную трудность, возникающую при освоении правила — как поставить первую цифру множителя, — придётся преодолеть только один раз, всем классом, хотя бы с помощью преподавателя.

4. Зато после того, как Упражнение 4 выполнено и основные навыки усвоены, полезно рассмотреть более разнообразные примеры и заботиться о приобретении известного мастерства. Вот образчики:

1. $0{,}00039 \times 607{,}4$ (с тремя знаками после запятой)?

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}00\overset{*}{0}39 \\ 4706 \end{array} \\ \hline 234 \\ 2 \\ \hline 0{,}236 \end{array}$$

2. То же с перестановкой множимого и множителя?

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 607{,}40\overset{*}{0} \\ 930\,000 \end{array} \\ \hline 182 \\ 54 \\ \hline 0{,}236 \end{array}$$

3. 3 508 729 × 0,72 (в тысячах)?

$$\begin{array}{r}
3\,50\overset{*}{8}\,729\\
270\\
\hline
24\quad 56\\
70\\
\hline
2\,526\,000
\end{array}$$

4. То же с перестановкой?

$$\begin{array}{r}
\times\,\overset{*}{0}000{,}720\\
9278\,053\\
\hline
2\,160\\
360\\
6\\
\hline
2\,526\,000
\end{array}$$

5. Переставить множимое и множитель — прекрасный контроль рассматриваемого действия. Этим приёмом стоит воспользоваться в Упражнении 4, если табличный контроль не сойдётся и придётся искать ошибку.

6. Тому, кто заявляет, что он „не может понять“ этого правила или не знает, как следует поступить в таком-то случае, всегда есть возможность дать ответ: „сделайте обычным приёмом, проведите вертикальную черту правее назначенного разряда и уничтожьте всё, что правее черты“.

7. Предлагаем вниманию преподавателя иное расположение действия — без „переворачивания“ цифр во множителе. Считающий умножает последовательно на отдельные цифры множителя, двигаясь от высших разрядов к низшим и зачёркивая те цифры, которые уже не нужны. В примере 0,849 × 3,725, если хотим иметь в произведении три знака после запятой, нужно сначала помножить 849 на 3, затем (зачеркнув 9 и 3) помножить 84 на 7, затем (зачеркнув 4 и 7) 8 помножить на 2; „принимать во внимание“ всякий раз только что зачёркнутую цифру множимого. Получается запись:

```
 ×0,849
  3,725
 ------
  2 547
    594
     17
      4
 ------
  3,162
```

Вот то же действие, выполненное с двумя знаками после запятой:

```
 ×0,849
  3,725
 ------
  2,55
    59
     2
 ------
  3,16
```

При этом расположении действия необходимо внимательно („по рассуждению“) смотреть, что нужно умножить на первую цифру множителя, чтобы не ошибиться в разряде.

Пусть, после тщательного продумывания, преподаватель сделает выбор между умножением „с переворачиванием“ и умножением „без переворачивания“ и пусть покажет учащимся только один из этих приёмов.

5. СОКРАЩЁННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Упражнение имеет в виду: 1) приучить не писать лишних цифр при делении многозначных чисел и дробей, 2) закрепить навык применения табличного контроля.

Пусть требуется разделить 35,891 на 4,216, причём в частном достаточно получить три знака после запятой. В обычном расположении действие выглядит следующим образом:

```
_35,891      |4,216
 33 728:     |------
 -------      8,513
  _2 163:0
   2 108:0
  --------
     _55:00
      42:16
     -------
     _12:840
      12:648
         ----
         :192
```

Мы ясно видим, что в данном случае (как и в случае умножения) имеется совершенно излишний балласт цифр: всё, что стоит правее пунктира, вовсе не нужно.

Улучшить действие не представляет труда с помощью следующих соображений. Когда к первому остатку 2163 мы „сносим“ нуль, мы увеличиваем этот остаток, который должен дальше играть роль делимого, в десять раз. Но, вместо того, чтобы увеличивать делимое в десять раз, можно в десять раз уменьшить делитель. Итак, хотя бы посредством небольшой вертикальной чёрточки, отделим в делителе 4216 последнюю цифру, и тогда станем делить 2163 на 421:

$$\begin{array}{r|l}
-\,35{,}891 & 4{,}21\overset{|}{6} \\ \cline{2-2}
33\,728 & 8 \\ \cline{1-1}
2\,163 &
\end{array}$$

Получается 5; умножая на 5 делитель, будем однако (как и при сокращённом умножении) шестёрку справа от чёрточки „принимать во внимание“. Скажем: „пятью шесть — тридцать; это составляет три десятка. Пятью один — пять, да три — восемь“ (пишем восьмёрку) и т. д.

$$\begin{array}{r|l}
-\,35{,}891 & 4{,}21\overset{|}{6} \\ \cline{2-2}
33\,728 & 8{,}5 \\ \cline{1-1}
-\,2\,163 & \\
2\,108 & \\ \cline{1-1}
55 &
\end{array}$$

На следующем этапе вместо того, чтобы к остатку 55 сносить нуль, уменьшаем опять делитель в 10 раз, отделяя чёрточкой ещё одну цифру. В результате деления 55 на 42 получается 1. Приходится принимать во внимание единицу, стоящую правее новой чёрточки; но „одиножды один — один“, — десятка не составляет.

$$\begin{array}{r|l}
-\,35{,}891 & 4{,}2\overset{|}{1}\overset{|}{6} \\ \cline{2-2}
33\,728 & 8{,}51 \\ \cline{1-1}
-\,2\,163 & \\
2\,108 & \\ \cline{1-1}
-\,55 & \\
42 & \\ \cline{1-1}
13 &
\end{array}$$

Не снося нуля к остатку 13, ставим третью чёрточку в делителе и тогда видим, деля 13 на 4, что в частном третий знак после запятой будет 3. В окончательном виде сокращённое деление представляется следующим образом:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;35{,}891 & 4{,}\overset{|}{2}\overset{|}{1}\overset{|}{6} \\
33\,728 & \overline{8{,}513} \\
\hline
-\;2\,163 & \\
2\,108 & \\
\hline
-\;55 & \\
42 & \\
\hline
-\;13 & \\
13 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Лишних цифр, как видно, здесь писать не приходится.

Рассмотрим другой пример. Пусть требуется разделить 422,5018 на 8,13649, ограничиваясь в частном двумя знаками после запятой. Чтобы получить первую цифру частного, отделим в делимом две первых цифры (для этого поставим звёздочку над цифрой 2, а также над цифрой 8 — числом единиц в делителе), и после деления 42 на 8 получаем 5. Эта пятёрка означает число десятков в частном. Если бы требовалось округлить частное в десятках, то действие было бы уже закончено. Если бы требовалось округлить частное в единицах, то пришлось бы делить не 42 на 8, а 422 на 81. Если бы требовалось округление в десятых, то точно так же пришлось бы делить 4225 на 813. Наконец, раз требуется округление в сотых, то придётся 42250 делить на 8136. Итак, отделим указанные цифры в делимом и в делителе (чёрточками, отстоящими от звёздочек на одно и то же число цифр) и приступим к делению. Из цифр, стоящих правее чёрточек, могут пригодиться только первые: их нужно будет „принимать во внимание". Приводим само действие:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;4\overset{*}{2}2{,}50\overset{|}{1}8 & \overset{*}{8}{,}\overset{|}{1}\overset{|}{3}\overset{|}{6}\overset{|}{4}9 \\
406\,82 & \overline{51{,}93} \\
\hline
-\;15\,68 & \\
8\,14 & \\
\hline
-\;7\,54 & \\
7\,32 & \\
\hline
22 &
\end{array}
$$

Чтобы правильно поставить запятую в частном, следует в самом начале действия отдать себе отчёт в том, каков разряд первой цифры частного и писать её на надлежащем месте.

В предыдущих примерах делитель имел **один** знак перед запятой. Если число знаков иное, то перенесением запятой на одно и то же число знаков в делимом и делителе всегда можно добиться, чтобы в делителе был один знак перед запятой. Например, если требуется разделить 0,52104 на 0,0037, скажем, в целых числах, то станем делить 521,04 на 3,7:

$$\begin{array}{rl}
-\overset{*}{5}21{}^{|},04 & \big|\;\underline{\overset{*}{3}{}^{|},7{}^{|}0{}^{|}} \\
\underline{370} & \;141 \\
-151 & \\
\underline{148} & \\
3 &
\end{array}$$

Таким образом мы приходим к следующей формулировке правила сокращённого деления: следует:

1) передвинуть запятую в делимом и в делителе на одно и то же число знаков таким образом, чтобы в делителе слева от запятой была только одна цифра,

2) отделить в делимом (звёздочкой) слева — смотря по обстоятельствам — одну или две значащих цифры с таким расчётом, чтобы при делении отделённой части делимого на целую часть делителя получить частное с однозначной целой частью; в делителе звёздочку поставить над разрядом единиц,

3) отделить в делимом справа (чёрточкой) разряд, в котором должно производиться округление частного; в делителе поставить чёрточку на расстоянии стольких же цифр от звёздочки, как и в делимом;

4) выполнять последовательные частные (вспомогательные) деления без сноса цифр делимого, зато с перенесением чёрточки влево в делителе,

5) цифры частного выписывать под цифрами делителя строго по разрядам; запятую в частном ставить под запятой в делителе.

Упражнение 5

Даны семь десятичных дробей, разбитых на две группы; в первой — три, во второй — четыре дроби. Разделить каждую дробь первой группы на каждую дробь второй группы (всего 12 делений). При этом пользоваться правилом сокращённого деления, ведя действие в двух знаках после запятой. Сделать табличную проверку.

Результаты записывать на основном листе, как обычно, в двойной таблице; там же подводить суммы по столбцам. На вспомогательном листе — основные и контрольные действия (тем же сокращённым методом).

Образец

Основной лист

Делители

Делимые	1,542	1,837	2,841	3,766
2,473	1,61	1,34	0,87	0,66
3,517	2,28	1,92	1,24	0,93
4,915	3,19	2,68	1,73	1,31
10,905	7,07	5,94	3,84	2,90

Вспомогательный лист

$\overset{*}{2}{,}473$ | $\overset{*}{1}{,}542$ 1 54 | 1,61 93 92 1	$\overset{*}{2}{,}473$ | $\overset{*}{1}{,}837$ 1 84 | 1,34 63 55 8	$2{,}\overset{*}{4}73$ | $\overset{*}{2}{,}841$ 2 27 | 0,87 20	$2{,}\overset{*}{4}73$ | $\overset{*}{3}{,}766$ 2 26 | 0,66 21
$\overset{*}{3}{,}517$ | $\overset{*}{1}{,}542$ 3 08 | 2,28 44 31 13	$\overset{*}{3}{,}517$ | $\overset{*}{1}{,}837$ 1 84 | 1,92 1 69 1 65 4	$\overset{*}{3}{,}517$ | $\overset{*}{2}{,}841$ 2 84 | 1,24 68 57 11	$3{,}\overset{*}{5}17$ | $\overset{*}{3}{,}766$ 3 38 | 0,94 14
$\overset{*}{4}{,}915$ | $\overset{*}{1}{,}542$ 4 63 | 3,19 29 15 14	$\overset{*}{4}{,}915$ | $\overset{*}{1}{,}837$ 3 67 | 2,68 1 25 1 10 15	$\overset{*}{4}{,}915$ | $\overset{*}{2}{,}841$ 2 84 | 1,73 2 08 1 99 9	$\overset{*}{4}{,}915$ | $\overset{*}{3}{,}766$ 3 77 | 1,31 1 15 1 13 2

Контрольные действия

$1\overset{*}{0}{,}905$ | $\overset{*}{1}{,}542$ 10 79 | 7,07 11	$1\overset{*}{0}{,}905$ | $\overset{*}{1}{,}837$ 9 19 | 5,93 1 71 1 65 6	$1\overset{*}{0}{,}905$ | $\overset{*}{2}{,}841$ 8,52 | 3,84 2 38 2 27 11	$1\overset{*}{0}{,}905$ | $\overset{*}{3}{,}766$ 7 53 | 2,89 3 37 | 2,90 3 01 36

Методические замечания

1. Пункты 1, 2, 6 и отчасти 3 методических замечаний к Упражнению 4 остаются в силе и по отношению к Упражнению 5. Распределение данных производится посредством цифрового набора. Но вполне возможно предложить каждому учащемуся для Упражнения 5 использовать те же данные, которые он получил для Упражнения 4.

2. После того, как Упражнение 5 выполнено, стоит попрактиковаться в более разнообразных примерах:

1) 0,039 : 607,4 (в миллионных)?

$$\begin{array}{r|l}
0{,}0003\overset{*}{9}\overset{|}{0} & \overset{*}{6}{,}\overset{|}{0}74 \\ \cline{2-2}
-364 & 0{,}000064 \\ \cline{1-1}
26 &
\end{array}$$

2) 3508729 : 0,72 (в тысячах)?

$$\begin{array}{r|l}
3\overset{*}{5}08\overset{|}{7}290 & \overset{*}{7}\overset{|}{,}\overset{|}{2}\overset{|}{0}\overset{|}{0} \\ \cline{2-2}
-28800 & 4873000 \\ \cline{1-1}
-6287 & \\
5760 & \\ \cline{1-1}
-527 & \\
504 & \\ \cline{1-1}
23 &
\end{array}$$

3. Сокращённое деление (каждая операция в отдельности) прекрасно проверяется сокращённым же умножением. Поэтому в Упражнении 5, если табличный контроль сходится недостаточно удовлетворительно, следует искать ошибку посредством умножения.

6. СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

Упражнение имеет в виду: 1) укрепить в сознании учащихся идею порядка (линейное расположение чисел), 2) тренировать в употреблении знака неравенства, 3) создать повод для простейших дедуктивных заключений — на основе транзитивного свойства неравенства, 4) побудить к сравнению обыкновенных и десятичных дробей — в действии, 5) приучать к точности и аккуратности при изображении точек на числовой прямой.

Если требуется узнать, которая из двух данных дробей меньше и которая больше, то это можно сделать двумя различными способами. Пусть, например, даны дроби $\frac{4}{19}$ и $\frac{5}{23}$.

Первый способ заключается в том, что мы обе дроби приведём к общему знаменателю и затем сравним между собою числители полученных дробей.

Так как

$$\frac{4}{19} = \frac{4 \cdot 23}{19 \cdot 23} = \frac{92}{437}$$

и

$$\frac{5}{23} = \frac{5 \cdot 19}{23 \cdot 19} = \frac{95}{437},$$

и так как, очевидно,

$$\frac{92}{437} < \frac{95}{437},$$

то, значит,

$$\frac{4}{19} < \frac{5}{23}.$$

В сущности общий знаменатель 437 здесь вовсе не нужен. Можно не перемножать 19 и 23, а сказать проще: мы видим сразу, что

$$4 \cdot 23 < 5 \cdot 19,$$

и потому, разделив неравенство на произведение 19 · 23 и сокращая мысленно, получаем

$$\frac{4}{19} < \frac{5}{23}.$$

Если дано несколько дробей с различными знаменателями и требуется расположить их, скажем, в порядке возрастания, то в более простых случаях не представит труда привести их все сразу к одному общему знаменателю. Но в более сложных случаях, чтобы не иметь дела с очень большими знаменателями, удобнее сравнить дроби попарно. По большей части не придётся сравнивать каждую пару, если принять во внимание, что из $a < в$, $в < c$ следует $a < c$.

Рассмотрим, например, дроби

$$\frac{2}{7}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{4}{15}, \quad \frac{5}{18} \quad \text{и} \quad \frac{8}{29}.$$

Их общий знаменатель слишком велик. Будем действовать иначе. Так как $2 \cdot 11 > 3 \cdot 7$, то

$$\frac{2}{7} > \frac{3}{11}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{11} < \frac{2}{7}.$$

Возьмём следующую дробь $\frac{4}{15}$. Так как $4 \cdot 11 < 3 \cdot 15$, то

$$\frac{4}{15} < \frac{3}{11};$$

из неравенства

$$\frac{4}{15} < \frac{3}{11} \text{ и } \frac{3}{11} < \frac{2}{7}$$

следует неравенство

$$\frac{4}{15} < \frac{2}{7}.$$

Итак, мы уже установили, что

$$\frac{4}{15} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7}.$$

Возьмём следующую дробь $\frac{5}{18}$ и сравним её хотя бы с $\frac{4}{15}$.

Так как $5 \cdot 15 > 4 \cdot 18$, то $\frac{5}{18} > \frac{4}{15}$.

Придётся сравнить $\frac{5}{18}$ с $\frac{3}{11}$. Так как $5 \cdot 11 > 3 \cdot 18$, то

$$\frac{5}{18} > \frac{3}{11}.$$

Остаётся выяснить, что больше: $\frac{5}{18}$ или $\frac{2}{7}$? Так как $5 \cdot 7 < 2 \cdot 18$, то

$$\frac{5}{18} < \frac{2}{7}.$$

Итак,

$$\frac{4}{15} < \frac{3}{11} < \frac{5}{18} < \frac{2}{7}.$$

Возьмём последнюю дробь $\frac{8}{29}$ и попробуем её сравнить хотя бы с самой маленькой $\frac{4}{15}$. Оказывается, что $\frac{8}{29} > \frac{4}{15}$.* Точно так же, сравнивая $\frac{8}{29}$ со следующей по величине

---

* Здесь проще привести к общему числителю:

$$\frac{4}{15} = \frac{8}{30} < \frac{8}{29}$$

(из двух дробей с одинаковым числителем больше та, у которой знаменатель меньше).

дробью $\frac{3}{11}$, мы видим, что

$$\frac{8}{29} > \frac{3}{11}.$$

Но уже $\frac{5}{18}$ больше, чем $\frac{8}{29}$:

$$\frac{8}{29} < \frac{5}{18},$$

а дальше пробовать не нужно, так как из неравенств

$$\frac{8}{29} < \frac{5}{18} \text{ и } \frac{5}{18} < \frac{2}{7}$$

следует неравенство

$$\frac{8}{29} < \frac{2}{7}.$$

Окончательно, мы установили, что

$$\frac{4}{15} < \frac{3}{11} < \frac{8}{29} < \frac{5}{18} < \frac{2}{7}.$$

Другой способ сравнения дробей заключается в том, что мы их все превратим в десятичные — определяя столько знаков, сколько потребуется для сравнения.

Так,

$$\frac{4}{19} = 0{,}210\ldots, \quad \frac{5}{23} = 0{,}217\ldots,$$

и отсюда ясно видно, что

$$\frac{4}{19} < \frac{5}{23}.$$

Подобным же образом

$$\frac{2}{7} = 0{,}2857\ldots, \quad \frac{3}{11} = 0{,}2727\ldots, \quad \frac{4}{15} = 0{,}2666\ldots,$$
$$\frac{5}{18} = 0{,}2777\ldots, \quad \frac{8}{29} = 0{,}2758\ldots,$$

и потому

$$\frac{4}{15} < \frac{3}{11} < \frac{8}{29} < \frac{5}{18} < \frac{2}{7}.$$

Мы интересовались до сих пор только *порядком*, в котором располагаются по своей величине данные дроби.

Но если мы захотели бы отдать себе отчёт в том, насколько заданные дроби отличаются одна от другой, то для этого нельзя было бы указать лучшего способа, как изобразить эти дроби в виде точек на числовой оси.

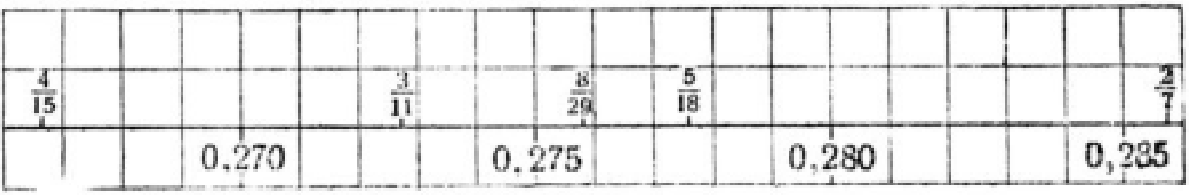


Чертёж 3

Так, глядя на чертёж 3, мы сразу видим, что $\frac{5}{18}$ лишь немного больше, чем $\frac{8}{29}$; зато $\frac{2}{7}$ значительно отличается от $\frac{5}{18}$.

Вместе с тем рассмотрение чертежа наводит на мысль: выяснить, не попадают ли в промежуток от 0,265 до 0,290, изображённый на чертеже, ещё какие-нибудь дроби с не очень большим знаменателем? Скажем, со знаменателем 23? или 43? или 73?

Чтобы ответить на вопрос, например, по поводу дробей со знаменателем 23, нет необходимости превращать в десятичные дроби все обыкновенные дроби со знаменателем 23. Обозначая через m числитель такой дроби, мы выразим, что она заключена в нашем промежутке, неравенством

$$0{,}265 < \frac{m}{23} < 0{,}290,$$

или (умножая на 23)

$$6{,}095 < m < 6{,}670.$$

Число m должно быть целым; но между 6,095 и 6,670 нет целых чисел. Значит, в нашем промежутке нет ни одной дроби со знаменателем 23.

Подобный же вопрос относительно дробей со знаменателем 43 приводит к неравенству

$$0{,}265 < \frac{m}{43} < 0{,}290,$$

или

$$11{,}395 < m < 12{,}470.$$

Между 11,395 и 12,470 имеется одно целое число $m = 12$. Итак, в наш промежуток попадает одна дробь со знаменателем 43, именно $\frac{12}{43}$. Обращая её в десятичную

$$\frac{12}{43} = 0{,}279\ldots,$$

мы легко найдём для неё место на чертеже.

Если зададим себе тот же вопрос по поводу знаменателя 73, то придём к неравенству

$$0{,}265 < \frac{m}{73} < 0{,}290,$$

или

$$19{,}345 < m < 21{,}170.$$

Отсюда для m получается два значения: $m = 20$ и $m = 21$. В рассматриваемом промежутке содержатся две дроби со знаменателем 73, именно

$$\frac{20}{73} = 0{,}273\ldots \quad \text{и} \quad \frac{21}{73} = 0{,}287\ldots$$

Таким же образом можно было бы исследовать и другие знаменатели.

Упражнение 6

1) Найти все дроби со знаменателем, не превышающим двадцати, заключённые в заданном промежутке.

2) Расположить эти дроби в порядке возрастания, связывая неравенствами.

3) Проверить правильность полученных результатов, превращая все дроби в десятичные, с округлением в тысячных.

4) Изобразить дроби точками на числовой оси.

На основном листе дать чертёж — рассматриваемый промежуток числовой оси с дробями, изображёнными в виде точек, а также табличку дробей с переводом в десятичные (располагать в порядке возрастания).

На вспомогательном листе расположить по определённой системе (сообразите, как лучше) необходимые неравенства и вычисления.

Указание к пункту 1. Естественно искать в заданном промежутке сначала дроби со знаменателем 2, затем 3, 4 и т. д. до 20.

Образец

Дан промежуток от 0,24 до 0,29

Основной лист

$$\frac{1}{4}=0,250 \qquad \frac{5}{19}=0,263 \qquad \frac{4}{15}=0,267$$

$$\frac{3}{11}=0,273 \qquad \frac{5}{18}=0,278 \qquad \frac{2}{7}=0,286$$

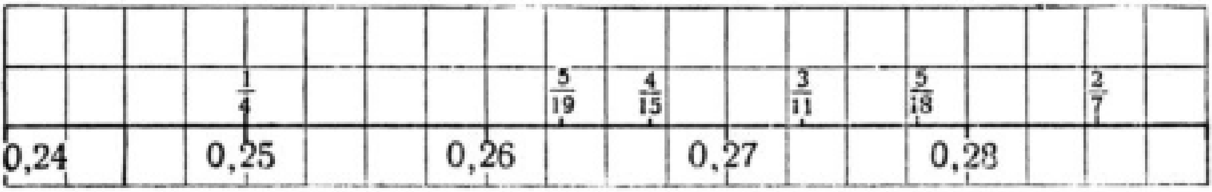


Чертёж 4

Вспомогательный лист

1) $\frac{1}{4}<\frac{2}{7}$

2) $\frac{3}{11}>\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}<\frac{2}{7}$

$$\frac{1}{4}<\frac{3}{11}<\frac{2}{7}$$

3) $\frac{4}{15}>\frac{1}{4}$, $\frac{4}{15}<\frac{2}{7}$

$$\frac{4}{15}<\frac{3}{11}$$

$$\frac{1}{4}<\frac{4}{15}<\frac{3}{11}<\frac{2}{7}$$

4) $\frac{5}{18}>\frac{1}{4}$, $\frac{5}{18}>\frac{4}{15}$, $\frac{5}{18}>\frac{3}{11}$

$$\frac{5}{18}<\frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{4}<\frac{4}{15}<\frac{3}{11}<\frac{5}{18}<\frac{2}{7}$$

5) $\frac{5}{19}>\frac{1}{4}$

$$\frac{5}{19}<\frac{4}{15}$$

$$\frac{1}{4}<\frac{5}{19}<\frac{4}{15}<\frac{3}{11}<\frac{5}{18}<\frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 19 \\ \underline{38} & 0,263\ldots \\ 120 & \\ \underline{114} & \\ 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{40} & 15 \\ \underline{100} & 0,266\ldots \\ 100 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{30} & 11 \\ \underline{80} & 0,2727\ldots \\ \underline{30} & \\ 80 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 18 \\ \underline{36} & 0,277\ldots \\ 140 & \\ \underline{126} & \\ 140 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 7 \\ \underline{14} & 0,286\ldots \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \end{array}$$

Методические замечания

1. Можно рекомендовать брать промежутки, протяжённостью в 0,05 единиц. Подходящий масштаб: $0{,}05 =$ 20 клеточек; $0{,}01 = 4$ клеточки.

Округление в тысячных достаточно. В самом деле, расстояние между двумя какими-нибудь точками будет не меньше, чем

$$\frac{1}{20 \cdot 19} < 0{,}0026 \sim 1 \text{ клеточка.}$$

2. На чертеже 5 изображены промежутки от 0,0 до 0,1; от 0,1 до 0,2 и т. д., вместе составляющие один промежуток от 0 до 1, и отмечены все дроби, знаменатели которых не превышают 20. Из чертежа видно, что представляют интерес только промежутки от 0,1 до 0,47 (примерно) и от 0,53 (примерно) до 0,9. Если предлагать отдельным учащимся промежутки

от 0,10 до 0,15
от 0,12 до 0,17
от 0,14 до 0,19
. . . .
от 0,44 до 0,47

от 0,53 до 0,58
от 0,55 до 0,60
от 0,57 до 0,62
. . . .
от 0,87 до 0,90,

то класс в 36 человек будет обеспечен различными задачами. Так как промежутки будут частично накладываться, но не будет исключена некоторая возможность взаимного контролирования. Чертёж 5 поможет преподавателю при просмотре работ.

3. В порядке предварительного упражнения у доски не мешает помочь учащимся взяться за дело. Разыскивать дроби, содержащиеся в заданном промежутке, следует систематически, рассматривая последовательно возрастающие знаменатели. Так, имея дело с промежутком от 0,24 до 0,29 можно сразу без письменных вычислений установить, что 1) дроби со знаменателями 2 и 3 в него не попадают, 2) дробь со знаменателем 4 попадает одна, именно, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, 3) дроби со знаменателем 5 не попадают (так как $\frac{1}{5} = 0{,}20 < 0{,}24$, а $\frac{2}{5} = 0{,}40 > 0{,}29$), 4) из дробей со знаменателем 6 нужно рассмотреть только $\frac{1}{6}$ и $\frac{5}{6}$, но $\frac{1}{6} \sim 0{,}16 < 0{,}24$, а $\frac{5}{6} > 0{,}29$, 5) из дробей

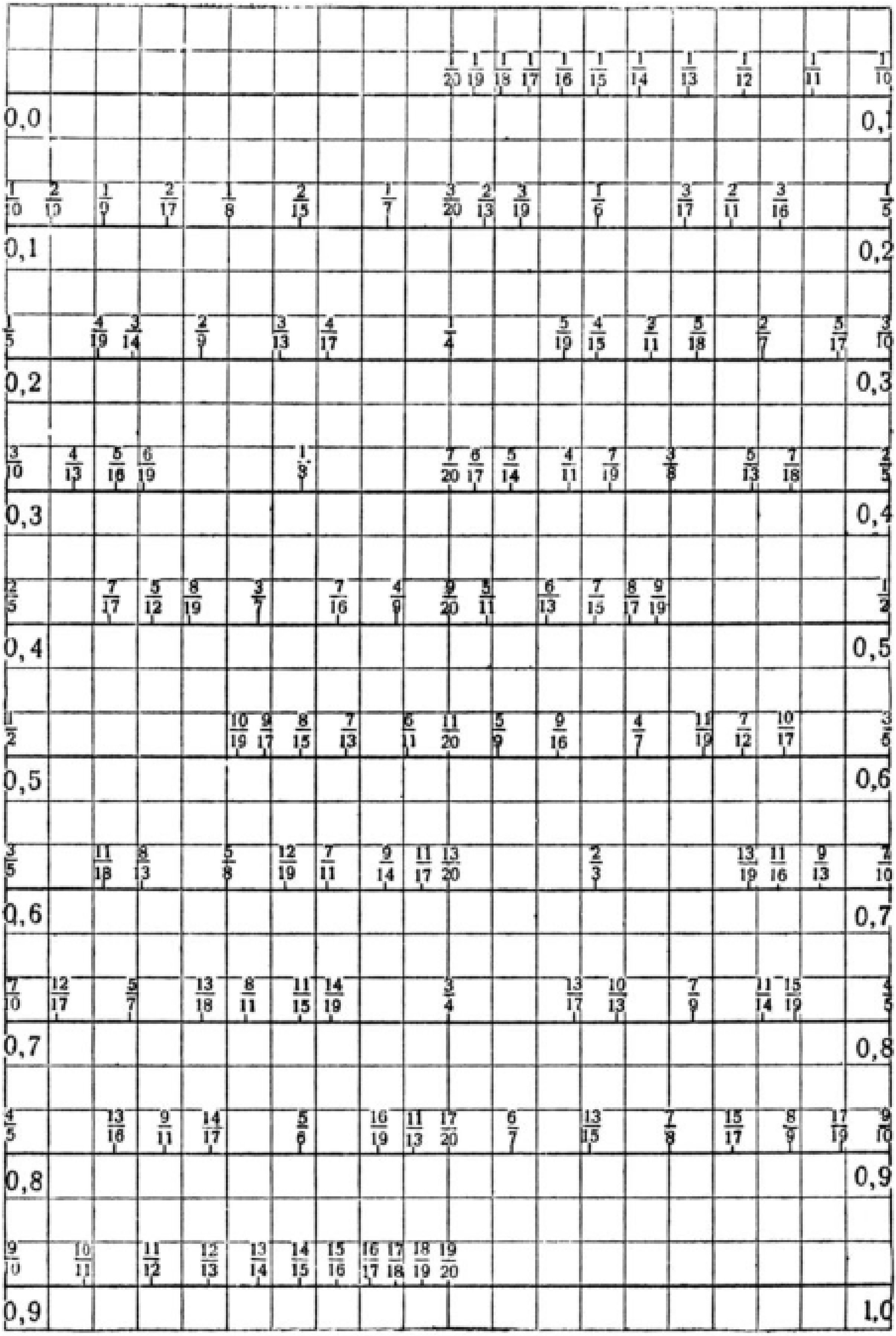

1/20
1/19
1/18
1/17
1/16
1/15
1/14
1/13
1/12
1/11
1/10
0,0
0,1
1/10
2/19
1/9
2/17
1/8
2/15
1/7
3/20
2/13
3/19
1/6
3/17
2/11
3/16
1/5
0,1
0,2
1/5
4/19
3/14
2/9
3/13
4/17
1/4
5/19
4/15
3/11
5/18
2/7
5/17
3/10
0,2
0,3
3/10
4/13
5/16
6/19
1/3
7/20
6/17
5/14
4/11
7/19
3/8
5/13
7/18
2/5
0,3
0,4
2/5
7/17
5/12
8/19
3/7
7/16
4/9
9/20
5/11
6/13
7/15
8/17
9/19
1/2
0,4
0,5
1/2
10/19
9/17
8/15
7/13
6/11
11/20
5/9
9/16
4/7
11/19
7/12
10/17
3/5
0,5
0,6
3/5
11/18
8/13
5/8
12/19
7/11
9/14
11/17
13/20
2/3
13/19
11/16
9/13
7/10
0,6
0,7
7/10
12/17
5/7
13/18
8/11
11/15
14/19
3/4
13/17
10/13
7/9
11/14
15/19
4/5
0,7
0,8
4/5
13/16
9/11
14/17
5/6
16/19
11/13
17/20
6/7
13/15
7/8
15/17
8/9
17/19
9/10
0,8
0,9
9/10
10/11
11/12
12/13
13/14
14/15
15/16
16/17
17/18
18/19
19/20
0,9
1,0

чертёж 5

со знаменателем 7 дробь $\frac{2}{7}=0{,}286$ попадает в промежуток, а $\frac{1}{7}$ и $\frac{3}{7}$ (и большие) не попадают, так как $\frac{1}{7}\sim$ $\sim 0{,}14<0{,}24$, а $\frac{3}{7}\sim 0{,}42>0{,}29$ и т. д. Начиная примерно со знаменателя 13, можно начать „решать неравенства“, как было показано выше.

4. За преподавателем, пожалуй, следует оставить один способ контроля, из которого, впрочем, не стоит делать тайны: посчитать разности между последовательно возрастающими дробями, попавшими в промежуток (округлённым в тысячных), и сверить с этими числами расстояния между отмеченными точками на оси. Так, в нашем примере разности $\frac{5}{19}-\frac{1}{7}$, $\frac{4}{15}-\frac{5}{19}$, $\frac{3}{11}-\frac{4}{15}$, $\frac{5}{18}-\frac{3}{11}$, $\frac{2}{7}-\frac{5}{18}$ составляют примерно 13, 4, 5, 6 и 8 тысячных: и на-глаз видно, что чертёж не стоит в противоречии с этими результатами.

5. Возможен следующий, весьма облегчённый, хотя и менее полезный вариант Упражнения 6. Вместо того, чтобы заставлять учащегося разыскивать в данном промежутке все дроби со знаменателем $\leqslant 20$, преподаватель просто задаёт их — выписанными на карточке в произвольном порядке (врассыпную). Подготовить карточки не представит большого труда, если воспользоваться чертежом. Этот вариант удобен, если упражнение предлагается в VI, а не в VII классе.

7. ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

(Классная повторительная работа с графическим контролем)

Упражнение имеет в виду: 1) повторение основных арифметических действий с десятичными дробями, в том числе сокращённого умножения и деления, 2) яркую демонстрацию метода графического контроля.

При подстановке числовых значений в данную формулу обыкновенно рекомендуется, чтобы избежать какой-нибудь ошибки, тщательно переписывать эту формулу, заменяя лишь входящие в неё буквы их числовыми значениями, и затем сразу или постепенно выполнять указываемые формулой действия, соединяя последовательно получаемые результаты знаками равенства.

Например, при $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{2}{3}$ мы получаем:

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{16}+\frac{4}{9}}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{73}{144}\right)}=$$

$$=\frac{144}{6\cdot 73}=\frac{24}{73}.$$

Однако так удобно поступать только в том случае, если все действия настолько просты, что могут быть выполнены в уме, не прибегая к вертикальному расположению („столбиком“).

Если числовые значения входящих букв — многозначные целые числа или десятичные дроби, то гораздо лучше, выполняя действие в вертикальном расположении, выписывать слева на надлежащем уровне буквенные выражения получаемых числовых величин.

Например, если даны значения $x=3{,}87$ и $y=2{,}49$, то с округлениями в сотых, нахождение числового значения того же выражения будет записано следующим образом:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3{,}87\\ 9\,42\end{array}\\ \hline 7\,74\\ 1\,55\\ 34\\ \hline xy=9{,}63\end{array}\qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3{,}87\\ 7\,83\end{array}\\ \hline 11\,61\\ 3\,10\\ 27\\ \hline x^2=14{,}98\end{array}\qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2{,}49\\ 9\,42\end{array}\\ \hline 4\,98\\ 1\,00\\ 22\\ \hline v^2=6{,}20\end{array}\qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}14{,}98\\ 6{,}20\end{array}\\ \hline x^2+y^2=21{,}18\end{array}\quad \begin{array}{l|l} 9{,}63 & 21{,}18\\ \cline{2-2} 84 & 0{,}46\\ \cline{1-1} 12 & \end{array}$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=0{,}46.$$

Упражнение 7

Вычислить значение величины

$$v=\frac{1+\frac{1}{2}x+x^2}{1+x^2}$$

при заданном значении x. Вычисление вести с тремя знаками после запятой (в тысячных).

Образец

$$\begin{array}{r@{\;}l}
x &= 1{,}263\\
x^2 &= 1{,}596\\
\frac{1}{2}x &= 0{,}632\\
\hline
1+\frac{1}{2}x+x^2 &= 3{,}228\\
\hline
\dfrac{1+\frac{1}{2}x+x^2}{1+x^2} &= 1{,}243
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}1{,}263\\ 3\,621\end{array}\\
\hline
1\,263\\
253\\
76\\
4\\
\hline
x^2=1{,}596
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3{,}228 & 2{,}596\\
\underline{2\,596} & 1{,}243\\
632 & \\
\underline{519} & \\
113 & \\
\underline{104} & \\
9 &
\end{array}$$

Методические замечания

1. Эта маленькая работа внешним образом преследует цель повторения основных действий с десятичными дробями. Попутно показываются приёмы расположения действий при постановке числовых значений в буквенную формулу.

2. Работа выполняется в классе, на отдельных листочках. Значения x раздаются на билетиках в виде десятичных дробей с тремя знаками после запятой. Они берутся из промежутка $0{,}500 < x < 1{,}500$.

Следующий набор значений x имеет ряд преимуществ: значения расположены с известной равномерностью, причём за основу взята арифметическая прогрессия с разностью 0,029; этим обеспечивается цифровое разнообразие в последних знаках; однако нуль на третьем месте после запятой избегнут:

0,529
0,558
0,587
0,616
0,645
0,674
0,703
0,732
0,761
0,789
0,818
0,847
0,876
0,905
0,934
0,963
0,992
1,021
1,049
1,078
1,107
1,136
1,165
1,194
1,223
1,252
1,281
1,309
1,338
1,367
1,396
1,425
1,454
1,483

При небольшом числе учащихся в классе желательно урезать набор и с начала и с конца; если же класс — большой и билетиков не хватит, то можно продолжать за пределы 1,500, сохраняя тот же принцип подбора значений x.

3. Чтобы наладить приём и расположение действия, имеет смысл предварительно вызвать к доске одного из учащихся с его собственным билетом.

4. Работа не отнимет много времени — даже если учащиеся не будут пользоваться сокращёнными приёмами умножения и деления. По мере подачи работ результаты подвергаются на доске графическому контролю.

5. Коллективно проводимый графический контроль на доске — главная часть работы. Покуда класс занимается вычислениями, преподаватель подготовляет на доске по возможности аккуратно выполненную вырезку из координатной сетки, соответствующую значениям $0{,}500 < x < 1{,}500$; $1{,}200 < y < 1{,}250$. Если по горизонтальной оси Ox брать промежутки 0,050, а по вертикальной оси Oy — промежутки 0,005, то придётся провести два десятка вертикалей и десяток горизонталей; масштаб желательно выбрать так, чтобы вырезка из сетки заняла всю доску. Не смущаясь тем, что и начало и оси координат окажутся далеко за пределами доски, следует при соответствующих делениях расставить числа

$$0{,}500;\ 0{,}550;\ 0{,}600 \text{ и т. д.}$$

по нижнему и по верхнему краю доски; числа

$$1{,}200;\ 1{,}205;\ 1{,}210 \text{ и т. д.}$$

по левому и по правому краю доски.

Когда первая работа подана, преподаватель отмечает (кружочком или крестиком) на координатной сетке точку с координатами x и y, соответствующими значениям этих букв в поданной работе. Избегая излишних объяснений, он показывает всему классу, как по числовым значениям x и y он находит нужную точку. Так поступает он и со второй и с третьей поданными работами; потом уступит право отмечать точки тем учащимся, которые того пожелают, продолжая следить за ними и помогать им.

Если требуемой точки в пределах доски не окажется, автору работы придётся поискать ошибку в своих вычислениях. Если очередная точка станет на доске не в ряд с другими, заметно обособляясь, можно будет заподозрить текущую погрешность, возникшую, например, вследствие неправильных округлений. В чём именно дело — надо будет доискаться: или самому учащемуся или с помощью преподавателя.

6. Приём графического контроля не поразит своей новизной тех учащихся, которые перед тем — конечно, на более простых примерах — уже были ознакомлены с графиками функций. Однако будет также вполне естественно, если описываемое Упражнение 7, предложенное в форме классной письменной работы, с последующей проверкой на координатной сетке, окажется первой встречей с графическим представлением функций. Учащийся не сможет не оценить в высокой степени ту особую правильность в расположении отмечаемых точек, которая обнаружится, если вычисления будут произведены достаточно точно.

7. Ниже приводится график функции $y=\dfrac{1+\frac{1}{2}x+x^2}{1+x^2}$ на такой самой вырезке из координатной сетки, которую мы рекомендуем преподавателю подготовить на доске.

Когда все точки в числе, соответствующем числу

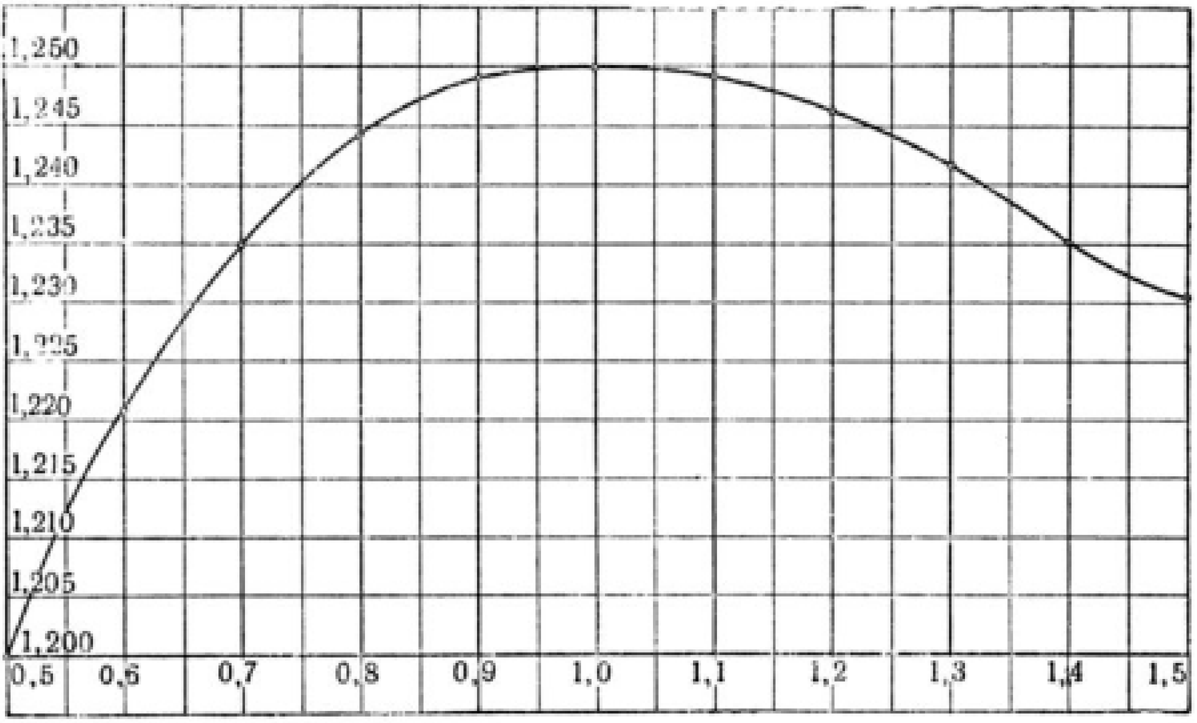


Чертёж 6

поданных работ, будут отмечены на доске, и после того, как „ошибочные“ точки, появление которых объясняется погрешностями в вычислениях, будут выловлены и исключены из рассмотрения, тогда через все „верные", „надёжные" точки, к полному удовлетворению класса, преподаватель собственной рукой проведёт этот самый плавный и красивый график. (Беды нет в том, что масштаб по вертикальной оси окажется в десяток раз больше, чем по горизонтальной!)

8. ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

(Домашняя повторительная работа с графическим контролем)

Упражнение имеет в виду: 1) повторение основных арифметических действий над обыкновенными дробями, 2) самостоятельное применения метода графического контроля, 3) освоение координатной сетки

Упражнение 8

Три варианта, различающиеся по трудности:

1. Вариант A — лёгкий.
2. Вариант B — средней трудности.
3. Вариант C — трудный.

Вариант A

По формуле

$$y=\frac{a}{x}+\frac{x}{b}$$

вычислить значения y при $x=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Полученные значения y представить в виде десятичных дробей, округляя в сотых. Составить табличку значений. Результаты проконтролировать графически, откладывая на сетке значения x вправо, значения y — вверх. На основном листе расположить табличку и график, на вспомогательном — те деления, связанные с превращением в десятичную дробь, которые легче сделать письменно, чем в уме. Прочие действия выполнять в уме.

Масштаб сетки: $1=1$ клеточка.

Вариант B

По формулам

$$u=\frac{a}{x}+\frac{x}{b}, \quad v=\frac{b}{x}+\frac{x}{a},$$

$$y=uv$$

вычислить последовательно значения u, v, y при $x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Значения y представить в виде десятичных дробей, округляя в сотых. Составить табличку значений u, v, y. Результаты контролировать графически, откладывая на сетке значения x вправо, значения u, v, y — вверх. На основном листе расположить табличку и график; на вспомогательном — те деления, связанные с превращением в десятичную дробь, которые легче выполнить письменно, чем в уме. Прочие действия выполнять в уме.

Масштаб графика: 1 = 1 клеточка.

Вариант C

По формулам

$$s=\frac{a}{x}+\frac{x}{a}, \quad t=\frac{b}{x}+\frac{x}{b},$$

$$u=st, \quad v=\frac{s}{t},$$

$$y=\frac{u+v}{2}$$

вычислить последовательно значения s, t, u, v, y при $x=1, 2, 3, 4, 5$ и расположить на основном листе в виде таблички; там же поместить табличку значений u, v, y в виде десятичных дробей с округлением в сотых. Результаты контролировать графически, откладывая на сетке значения x вправо, значения u, v, y — вверх. На вспомогательном листе помещать лишь те вычисления, которые трудно выполнить в уме.

Масштаб графика: 1 = 2 клеточки.

Указания: 1) Выписывать на вспомогательном листе подробно сложение $u+v$. 2) Не исключать целых частей из неправильных дробей, раз их придётся потом перемножить.

Образцы работы

(при значениях $x = 3$, $b = 5$)

Вариант А

Основной лист

x	$y = \frac{3}{x} + \frac{x}{5}$	x	$v = \frac{3}{x} + \frac{x}{5}$
1	$3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}20$	6	$\frac{1}{2} + \frac{6}{5} = \frac{17}{10} = 1{,}70$
2	$\frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{19}{10} = 1{,}90$	7	$\frac{3}{7} + \frac{7}{5} = \frac{64}{35} = 1{,}83$
3	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}60$	8	$\frac{3}{8} + \frac{8}{5} = \frac{79}{40} = 1{,}98$
4	$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20} = 1{,}55$	9	$\frac{1}{3} + \frac{9}{5} = \frac{32}{15} = 2{,}13$
5	$\frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5} = 1{,}60$	10	$\frac{3}{10} + 2 = \frac{23}{10} = 2{,}30$

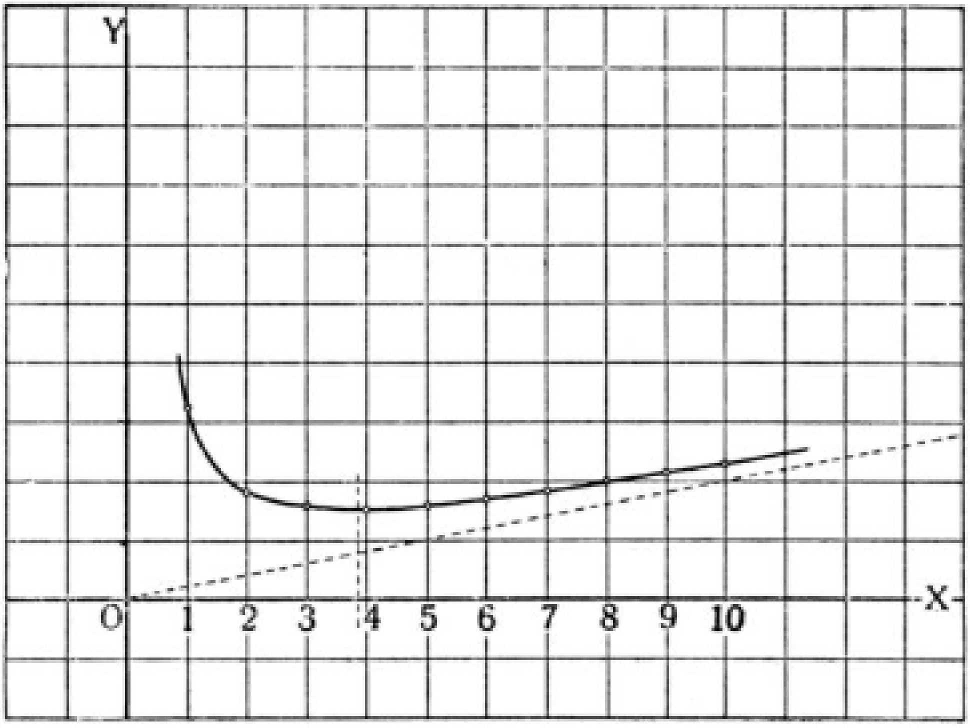


Чертёж 7

Вспомогательный лист

$$\begin{array}{r|l} 64 & \underline{3'5'} \\ \underline{35} & \;\;1{,}83 \\ 29 & \\ \underline{28} & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 79 & \underline{4'0'} \\ \underline{39} & \;\;1{,}98 \\ 36 & \\ \overline{\;3} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & \underline{1'5'} \\ \underline{20} & \;\;2{,}13 \\ 5 & \end{array}$$

Вариант В

Основной лист

x	$u=\frac{3}{x}+\frac{x}{5}$	$v=\frac{5}{x}+\frac{x}{3}$	$y=uv$
1	$3+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$	$5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$	$\frac{256}{15}=17{,}07$
2	$\frac{3}{2}+\frac{2}{5}=\frac{19}{10}$	$\frac{5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{19}{6}$	$\frac{361}{60}=6{,}02$
3	$1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$	$\frac{64}{15}=4{,}27$
4	$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{31}{20}$	$\frac{5}{4}+\frac{4}{3}=\frac{31}{12}$	$\frac{961}{240}=4{,}00$
5	$\frac{3}{5}+1=\frac{8}{5}$	$1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$	$\frac{64}{15}=4{,}27$
6	$\frac{1}{2}+\frac{6}{5}=\frac{17}{10}$	$\frac{5}{6}+2=\frac{17}{6}$	$\frac{289}{60}=4{,}82$
7	$\frac{3}{7}+\frac{7}{5}=\frac{64}{35}$	$\frac{5}{7}+\frac{7}{3}=\frac{64}{21}$	$\frac{4096}{735}=5{,}57$
8	$\frac{3}{8}+\frac{8}{5}=\frac{79}{40}$	$\frac{5}{8}+\frac{8}{3}=\frac{79}{24}$	$\frac{6241}{960}=6{,}50$
9	$\frac{1}{3}+\frac{9}{5}=\frac{32}{15}$	$\frac{5}{9}+3=\frac{32}{9}$	$\frac{1024}{135}=7{,}59$
10	$\frac{3}{10}+2=\frac{23}{10}$	$\frac{1}{2}+\frac{10}{3}=\frac{23}{6}$	$\frac{529}{60}=8{,}82$

Вспомогательный лист

$$\begin{array}{r|l} 79 & 7 \\ \times\; \underline{79} & 7 \\ 711 & \\ \underline{553\;} & \\ 6241 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \times\; \underline{23} & 5 \\ 69 & \\ \underline{46\;} & \\ 529 & \overline{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 256 & \underline{15\;\;\;\;} \\ \overline{106} & 17{,}07 \\ 105 & \\ \overline{\;\;10} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & \underline{15\;\;\;} \\ \overline{40} & 4{,}27 \\ \overline{100} & \end{array}$$

и т. д.

Основной лист

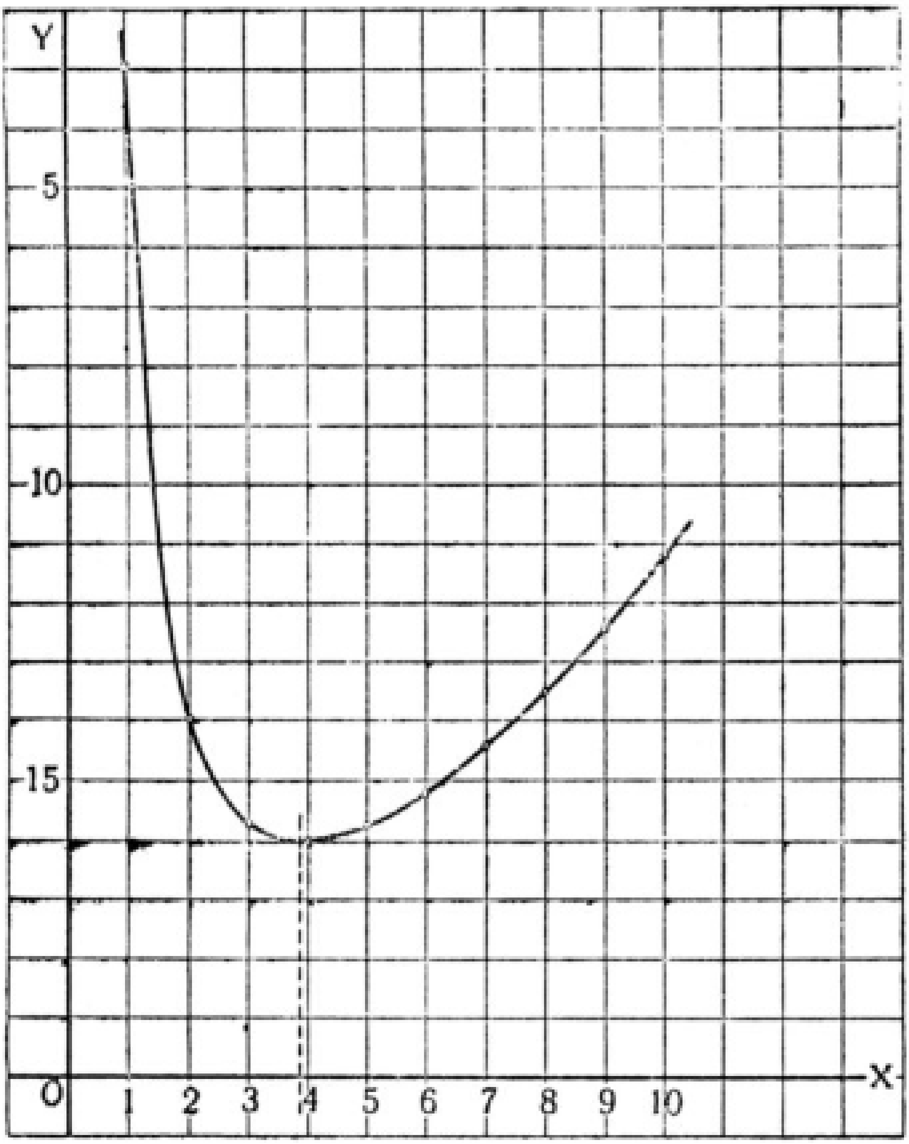


Чертёж 8

Вариант C

Основной лист

x	$s=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$	$t=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$	$u=st$	$v=\frac{s}{t}$	$y=\frac{u+v}{2}$
1	$\frac{10}{3}$	$\frac{26}{5}$	$\frac{52}{3}$	$\frac{25}{39}$	$\frac{701}{78}$
2	$\frac{13}{6}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{377}{60}$	$\frac{65}{87}$	$\frac{12233}{3480}$
3	2	$\frac{34}{15}$	$\frac{68}{15}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{1381}{510}$
4	$\frac{25}{12}$	$\frac{41}{20}$	$\frac{205}{48}$	$\frac{125}{123}$	$\frac{10405}{3936}$
5	$\frac{34}{15}$	2	$\frac{68}{15}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{17}{6}$

x	1	2	3	4	5
u	17,33	6,28	4,53	4,27	4,53
v	0,64	0,75	0,88	1,02	1,13
$u+v$	17,97	7,03	5,41	5,29	5,66
y	8,98	3,52	2,70	2,64	2,83

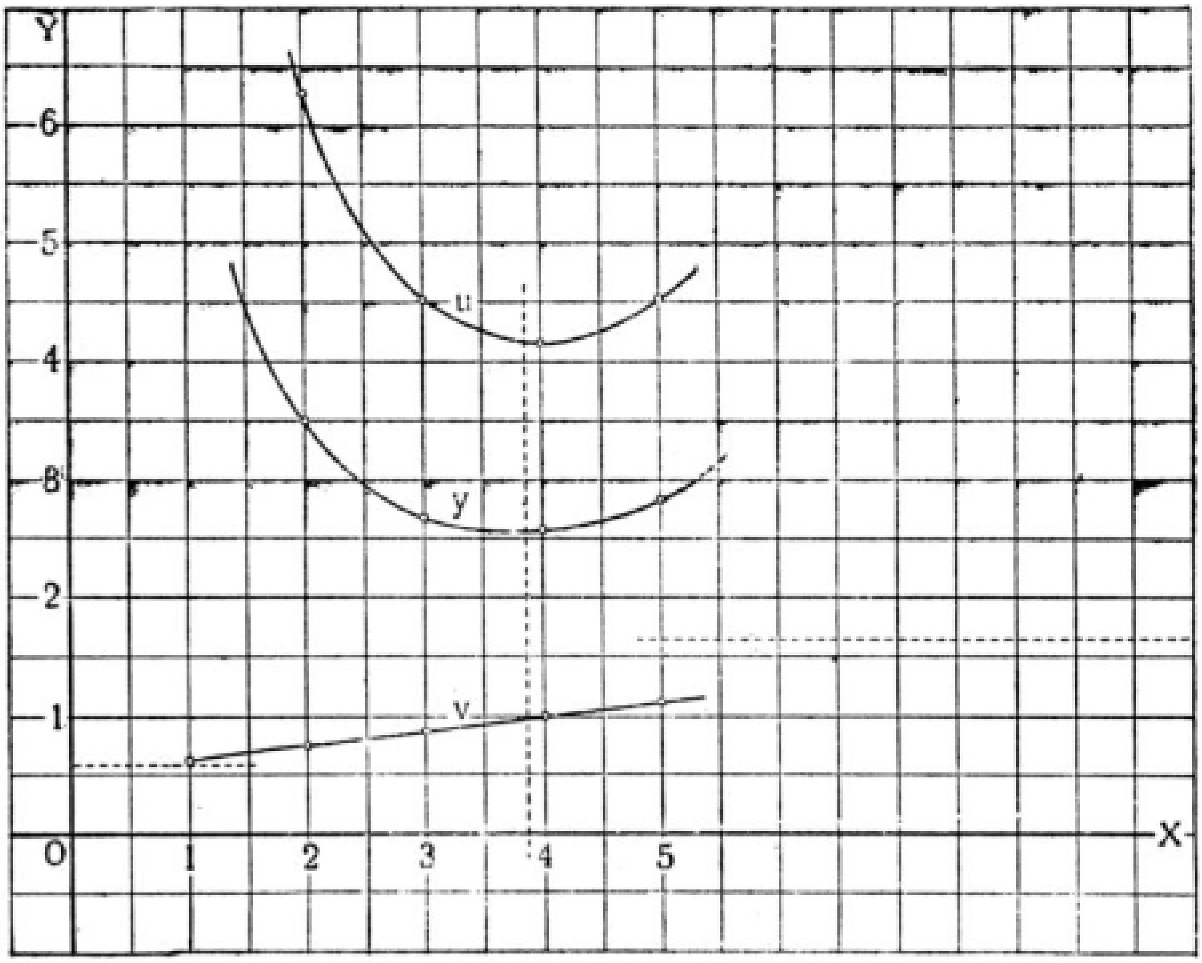


Чертёж 9

Вспомогательный лист

$$\frac{52}{3}+\frac{25}{39}=\frac{52\cdot 13+25}{39}=\frac{701}{39}$$

$$\begin{array}{l|l} 52 & 3 \\ \cline{2-2} 22 & 17{,}33 \\ \hline \quad 10 & \\ \hline \quad 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 25 & 3'9' \\ \cline{2-2} 234 & 0{,}64 \\ \hline \quad 16 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 701 & 3'9 \\ \cline{2-2} 39 & 17{,}98 \\ \hline 311 & \\ 273 & \\ \hline \quad 38 & \\ \quad 35 & \\ \hline \quad\; 3 & \end{array}$$

$$\frac{377}{60}+\frac{65}{87}=\frac{377\cdot 29+65\cdot 20}{60\cdot 29}=\frac{12\,233}{1\,740}$$

$$\begin{array}{r|l} 377 & \underline{6'0'} \\ \underline{360} & \;\;6{,}28 \\ 17 & \\ \underline{12} & \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 65 & \underline{8'7'} \\ \underline{61} & \;\;0{,}75 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12233 & \underline{1'7'4'0} \\ \underline{1218} & \;\;\;\;7{,}03 \\ 5 & \end{array} \qquad \text{и т. д}$$

Методические замечания

1. Упражнение 8 представляет собой домашнюю письменную работу. Выбор вариантов A, B, C следует ставить в зависимость от среднего уровня подготовки класса (а не ученика). Всему классу предлагается один и тот же вариант.

Можно сделать и так: использовать вариант A для предварительного показательного упражнения у доски, а на дом задать вариант B или C.

2. Поскольку в основных формулах содержатся два параметра a и b, легко обеспечить каждого ученика класса его собственными значениями параметров. В двойной таблице, содержащей комбинации целых значений a и b в пределах от 2 до 6 (если в классе не более 25 учащихся), от 2 до 7 (если учащихся не более 36) или от 2 до 8 (не более 49 учащихся), преподаватель, подготовляющий задания, пишет фамилии учеников; затем переносит соответствующие значения параметров на карточки. Можно обойтись и без карточек, написав двойную таблицу с фамилиями на доске, например:

$\frac{b}{a}$	2	3	4	5	6
2	*Петров*	*Иванов*	*Сергеев*	. . . .	. . . . . .
3	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
4	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
5	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .

и тогда Петров возьмёт значения $a=2$, $b=2$, Иванов — значения $a=2$, $b=3$, Сергеев — значения $a=2$, $b=4$ и т. д.

3. Преподаватель обязан настойчиво рекомендовать учащимся приступать к вычерчиванию графика не после того, как вычисления закончены, а строить график „по точкам“, т. е. отмечать каждую точку на чертеже немедленно по вычислении её координат. Такой порядок должен быть принят и во время классных упражнений.

4. По варианту A все действия настолько просты, что вспомогательный лист может и вовсе отсутствовать. По варианту B учащийся без вспомогательного листа не обойдётся и должен его представить вместе с основным; преподаватель будет смотреть его по мере надобности. По варианту C на вспомогательном листе выписывается сложение дробей, что представляет ответственную часть работы, подлежащую внимательной проверке преподавателя (как выбран общий знаменатель?), а также деления, связанные с превращением дробей в десятичные; вторая табличка на основном листе (в десятичных дробях) позволяет самому учащемуся контролировать правильность сложений.

Выбрать ли для данной работы вариант C, зависит главным образом от того, находит ли преподаватель целесообразным, исходя из уровня подготовки класса, предложить упражнения в сложении дробей с более крупными знаменателями.

5. При проверке работ следует порекомендовать преподавателю прежде всего разложить (на большом столе) все основные листы в том же порядке, в каком располагаются фамилии авторов работ в двойной таблице, упомянутой в пункте 2, и направить внимание на графики. При постепенном изменении каждого из параметров a и b графики должны меняться также постепенно: таким образом, расположенные в указанном порядке графики полезно просмотреть бегло сначала по горизонтальным рядам, потом по вертикальным, следя за тем, как они изменяются от работы к работе. Так, в варианте A величина y есть, очевидно, возрастающая функция параметра a и убывающая функция параметра b, поэтому при движении по горизонтальному ряду (слева направо), т. е. при увеличении b, график должен понемногу спускаться вниз; напротив, при движении по вертикальному ряду (сверху вниз), т. е. при увеличении a, график должен несколько подниматься вверх. Можно, например,

сосредоточить внимание на последней точке с абсциссой $x=10$.

При беглом просмотре сразу выявятся все грубые ошибки, так как неправильности в поведении графиков сразу бросаются в глаза и свидетельствуют почти наверное о наличии арифметических погрешностей. Конечно, такого ряда явления обнаружатся только у более наивных учеников; что касается более сообразительных, то они сами догадаются в процессе работы уяснить себе причину „скачков“ графика, займутся поисками ошибки и, вероятно, найдут её. В добрый час! Что касается арифметических ошибок, не обнаруженных самими учащимися в процессе работы, то поиски их (раз они обнаружены графиком) вряд ли представят затруднения для преподавателя: однако с его стороны не всегда будет поступлено правильно, если он непосредственно укажет учащемуся, где именно сделана арифметическая ошибка; пусть лучше спросит автора работы, считает ли он правильным, не удивляется ли, что график в таком-то месте делает такие странные зигзаги или изгибы, — и предложит, чтобы причина этого была установлена непременно самим учеником.

6. Следующие замечания, касающиеся вариантов A, B, C, могут оказаться небесполезными для преподавателя, проверяющего работы.

В варианте A прямая $y=\frac{x}{b}$, очевидно, является асимптотой кривой $y=\frac{a}{x}+\frac{x}{b}$. Так, в приведенном образце мы имеем асимптоту $y=\frac{x}{5}$: она проведена на чертеже 7 (стр. 70) пунктиром.

С другой стороны, неравенство

$$\frac{a}{x}+\frac{x}{b}=\left(\frac{a}{x}-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{x}{b}\right)+2\sqrt{\frac{a}{b}}=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{a}{x}}-\sqrt{\frac{x}{b}}\right)^2+2\sqrt{\frac{a}{b}}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

показывает, даже не прибегая к дифференциальному исчислению, что функция $y=\frac{a}{x}+\frac{x}{b}$ имеет наименьшее значение (минимум) при условии

$$\sqrt{\frac{a}{x}}-\sqrt{\frac{x}{b}}=0,$$

т. е. в точке $x=\sqrt{ab}$. При этом $y=2\sqrt{\frac{a}{b}}$. В нашем примере точка, в которой достигается минимум, имеет абсциссу $\sqrt{3\cdot 5}$, т. е. 3,87, и ординату $2\sqrt{\frac{3}{5}}$, т. е. 1,55. На чертеже 7 минимум указан вертикальным пунктиром.

В варианте *B* y через x выражается по формуле

$$v=\frac{(ab+x^2)^2}{abx^2},$$

или

$$v=\frac{x^2}{ab}+2+\frac{ab}{x^2},$$

откуда видно, что при неограниченном возрастании x рассматриваемый график асимптотически приближается к параболе

$$y=\frac{x^2}{ab}+2,$$

прямолинейной же (наклонной) асимптоты не имеет.

С другой стороны, из формулы

$$y=\left(\frac{x}{\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{ab}}{x}\right)^2+4$$

легко заключить, что график имеет минимум в точке с координатами $(\sqrt{ab}, 4)$. На чертеже 8 (стр. 72) эта точка, с координатами $(\sqrt{15}, 4)$, отмечена пунктиром.

В варианте *C* график функции

$$u=\frac{(a^2+x^2)\ (b^2+x^2)}{ab\,x^2},$$

также не имеющий наклонной асимптоты, как показывает преобразование

$$u=\frac{1}{ab}\left[\left(x-\frac{ab}{x}\right)^2+(a+b)^2\right],$$

достигает минимума в точке с координатами

$$x=\sqrt{ab},\quad u=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Что касается графика функции

$$v=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2},$$

то из формулы

$$v = \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + x^2}\right)$$

видно, что с возрастанием x от 0 до бесконечности v изменяется в одном и том же направлении (возрастает, если $a < b$, и убывает, если $a > b$), именно от $\frac{a}{b}$ до $\frac{b}{a}$. Соответствующие пометки имеются на чертеже 9 (стр. 73).

Наконец, график функции y обладает тем свойством, что каждая его ордината есть средняя арифметическая соответствующих ординат графиков u и v: если двигать линейку, положив её параллельно вертикальной оси, то отрезки между графиками v и y с одной стороны и между графиками y и u с другой — будут всегда равны.

Имея в виду все указанные обстоятельства, преподаватель не останется безоружным, если услышит со стороны учащихся по поводу полученных графиков вопросы, свидетельствующие о повышенной любознательности.

9. ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ЧИСЛАМИ, ЗАДАННЫМИ ГРАФИЧЕСКИ

Упражнение имеет в виду: 1) повторение основных арифметических действий над десятичными дробями, в том числе сокращённого умножения и деления, 2) наглядную иллюстрацию изменения результата арифметических действий в зависимости от изменения данных, 3) укрепление навыка читать и отмечать на-глаз числовые данные на координатной сетке, 4) пропедевтическое знакомство с графическим представлением эмпирически заданных функций.

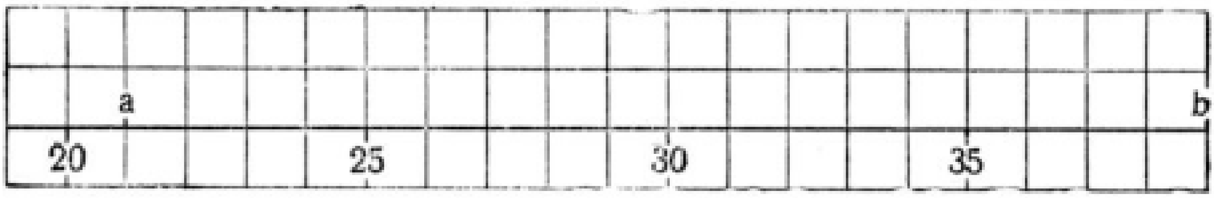


Чертёж 10

Пример 1. На черт. 10 изображена часть числовой оси; координаты точек, отмеченных чёрточками вниз, выписаны около этих точек. Кроме того, чёрточками вверх отмечены две точки с координатами, обозначенными через a и b. Требуется по чертежу определить числовые значения координат этих точек, затем вычислить числовые значения величин

$$m=\frac{a+b}{2},$$

$$n=\frac{2a+b}{3}, \qquad p=\frac{a+2b}{3},$$

$$q=\frac{4a+b}{5}, \quad r=\frac{3a+2b}{5},$$

$$s=\frac{2a+3b}{5}, \quad t=\frac{a+4b}{5}$$

и отметить на чертеже чёрточками вверх точки, координаты которых равны m, n, p, q, r, s, t.

Условимся говорить короче: „точка a“, „точка b“, ... „точка m“ и т. д.

Предложенный вопрос можно сформулировать так: по заданным точкам a и b найти точки m, n, p, q, r, s, t, определяемые написанными выше формулами.

Решение. Мы видим, глядя на данный чертёж, что $a=21$, $b=39$.
Отсюда находим:

$$m=\frac{21+39}{2}=30;$$

$$n=\frac{2\cdot 21+39}{3}=27; \qquad p=\frac{21+2\cdot 39}{3}=33;$$

$$q=\frac{4\cdot 21+39}{5}=24{,}6; \qquad r=\frac{3\cdot 21+2\cdot 39}{5}=28{,}2;$$

$$s=\frac{2\cdot 21+3\cdot 39}{5}=31{,}8; \quad t=\frac{21+4\cdot 39}{5}=35{,}4.$$

Найти на числовой оси точки m, n и т. д. не представит труда: нужно только возможно точнее отмеривать на-глаз доли единичных отрезков.

Результаты видны на следующем чертеже.

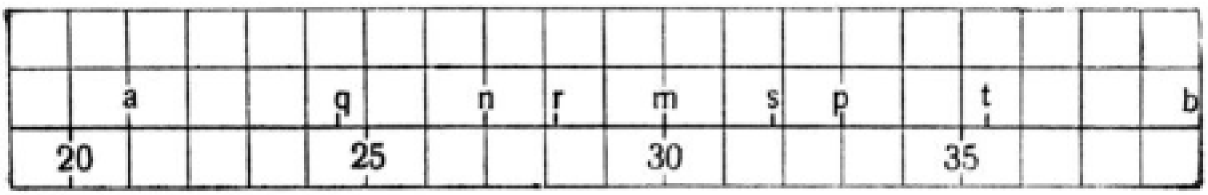


Чертёж 11

Пример 2. На *вертикально* расположенной числовой оси (чертёж 12) направление отсчёта и масштаб определяются точками, отмеченными *чёрточками влево*; кроме того, *чёрточками вправо*

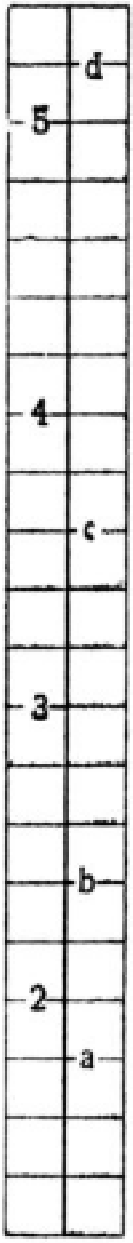


Чертёж 12

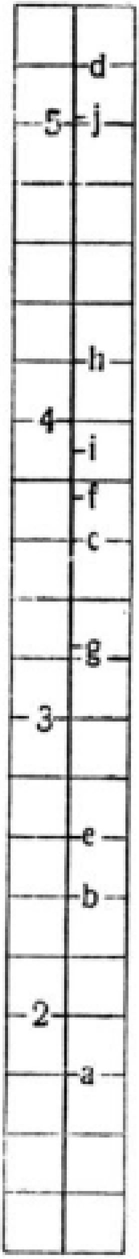

d
5
j
h
4
i
f
c
g
3
e
b
2
a

Чертёж 13

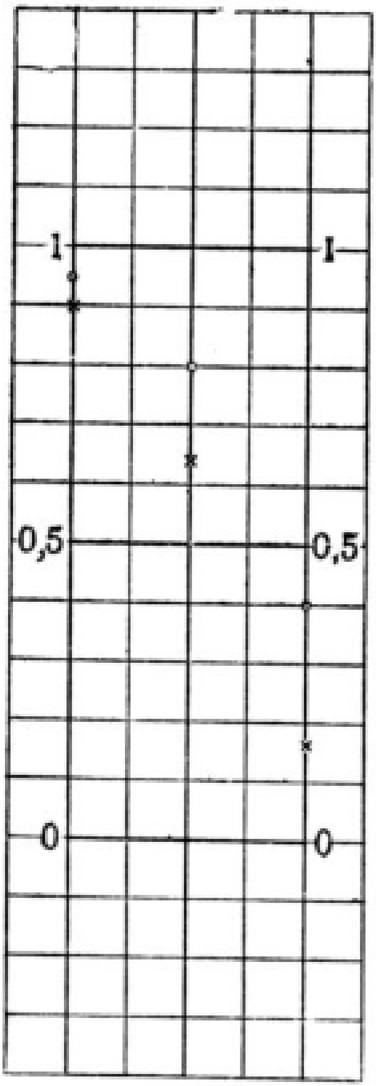


Чертёж 14

заданы точки a, b, c, d. Определив по масштабу на-глаз числовые значения a, b, c, d, вычислить значение величин

$$e=\frac{a+b+c}{3},\ f=\frac{b+c+d}{3},\ g=\frac{a+b+c+d}{4},$$

$$h=3a+b-c,\qquad i=\frac{ad}{b},\qquad j=\frac{a^2+d^2}{b+c}.$$

Решение. По чертежу находим:

$$a=1{,}8\qquad b=2{,}4\qquad c=3{,}6\qquad d=5{,}2,$$

и далее, вычисление даёт:

$$e=2{,}6\qquad f\sim 3{,}73\qquad g=3{,}25$$
$$h=4{,}2\qquad i=3{,}9\qquad j\sim 5{,}05.$$

То, что получим, отмечая полученные точки, изображено на чертеже 13.

Пример 3. Даны три параллельно расположенные вертикальные оси, причём направление отсчёта и масштаб на них определяются горизонталями, обозначенными на чертеже 14 цифрами 0—0, 1—1. Точки, называемые f, отмечены на каждой из осей кружочками. Требуется определить крестиками на всех трёх осях точки F, определяемые по формуле

$$F=f^2.$$

Решение. Из чертежа видно, что на трёх осях f соответственно равно 0,95; 0,8; 0,4.

Подставляя в предыдущую формулу, получаем для каждой оси значения F:

$$0{,}90\ldots;\ 0{,}64;\ 0{,}16.$$

Остаётся отметить точки F крестиками.

Вопрос: Что больше — число или его квадрат?

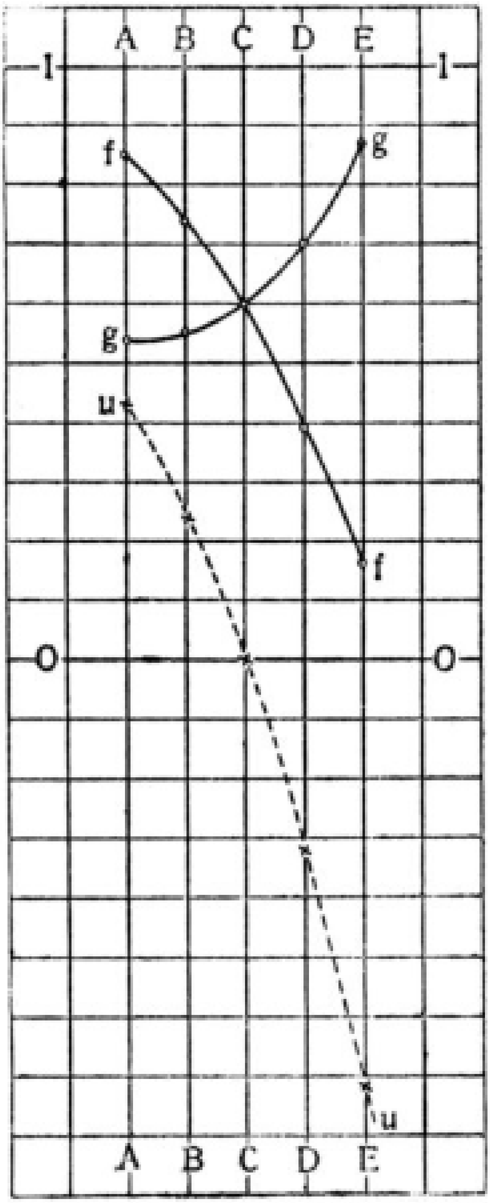


Чертёж 15

Пример 4. На любой вертикальной оси, расположенной между вертикалями AA и EE (см. черт. 15 на стр. 81), направление отсчёта и масштаб определяются отрезками 00 и 11. Кроме того, на каждой такой оси заданы точки f и g, определяемые как пересечение кривых ff и gg с рассматриваемой осью. Найти на вертикальных осях между AA и EE геометрическое место точек u, определяемых формулой

$$u = f^2 - g^2.$$

Решение. Ограничимся нахождением точек u на осях AA, BB, CC, DD и EE. Вычисление удобнее производить по формулам

$$u = (f + g)\,(f - g).$$

Значения f и g берём из чертежа и вычисление расположим следующим образом:

	A	B	C	D	E
f	0,85	0,74	0,60	0,39	0,18
g	0,54	0,55	0,60	0,70	0,87
$f+g$	1,39	1,29	1,20	1,09	1,05
$f-g$	0,31	0,19	0,00	− 0,31	− 0,69
u	0,43	0,24	0,00	− 0,34	− 0,72

Отметив на выбранных осях точки u крестиками и соединив их плавной кривой (пунктир на чертеже 15), можно догадываться, что эта кривая, по крайней мере приближённо, решает поставленную задачу о геометрическом месте точек u.

Вопрос: Если квадраты двух чисел равны, то обязательно ли равны сами числа?

Упражнение 9

На странице из обыкновенной клетчатой тетради проведите 11 параллельных вертикальных прямых — одна от другой на расстоянии в 2 клеточки. Отсчитайте 8 клеточек снизу и проведите горизонтальный отрезок 00; затем ещё 20 клеточек вверх и там проведите горизонтальный отрезок 11. Эти горизонтальные отрезки определяют направление отсчёта и масштаб на любой вертикальной оси.

Два графика *ff* и *gg* (их чертит учитель своей рукой) определяют на каждой вертикальной оси по две точки f и g.

Требуется на всех вертикальных осях построить точки s, d, p и q, определяемые по формулам

$$s=f+g, \qquad d=f-g, \qquad p=fg, \qquad q=\frac{f}{g}\,.$$

На основном листе дать графики s, d p и q и таблицу значений f, g, s, d, p, q по 11 прямым. На вспомогательном—11 сокращённых умножений и делений. Сложения и вычитания выполняются в самой таблице. Округлять до ближайшей сотой.

Образец 1

Основной лист

Графики (см. черт. 16 на стр. 84)

Таблица

f	0,63	0,67	0,68	0,65	и т. д.
g	0,52	0,62	0,70	0,77	
s	1,15	1,29	1,38	1,42	
d	0,11	0,05	0,02	0,12	
p	0,33	0,41	0,46	0,50	
q	1,21	1,08	0,97	0,84	

Вспомогательный лист

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}0{,}63\\ 2\,50\end{array}\\ \hline 32\\ 1\\ \hline 0{,}33\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}0{,}67\\ 2\,60\end{array}\\ \hline 40\\ 1\\ \hline 0{,}41\end{array} \text{ и т. д.}$$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 52 \\ \cline{2-2} \underline{52} & \;\;1{,}21 \\ 110 & \\ \underline{104} & \\ 6 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \underline{67} & 62 \\ \cline{2-2} 50 & \;\;1{,}08 \end{array} \text{ и т. д.}$$

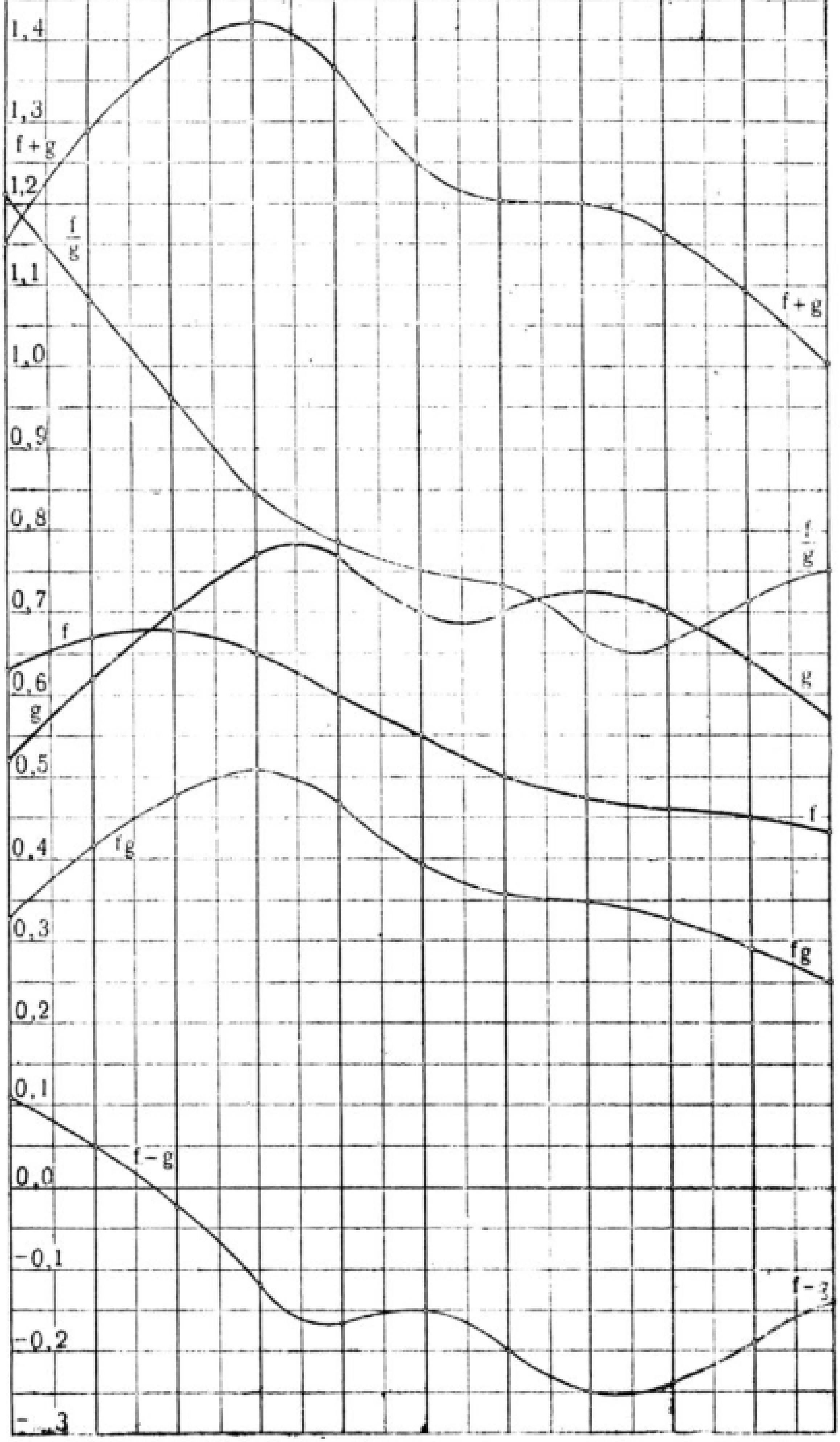

1,4
1,3
f + g
1,2
f/g
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
f
0,6
g
0,5
0,4
fg
0,3
0,2
0,1
f − g
0,0
−0,1
−0,2
−0,3
f + g
f/g
g
f
fg
f − g

Чертёж 16

Образец 2

Графики (см. черт. 17 на стр. 86).

Таблица и вспомогательный лист — такие же, как в образце 1.

Методические замечания

1. График, проведённый от руки, представляет один из примеров функции, „заданной эмпирически“. Отсутствие идеи эмпирической функции у учащихся ничем не воспрепятствует выполнению Упражнения 9 и, напротив, будет способствовать возникновению этой идеи. Но нужно заметить, что содержание упражнения особенно легко формулируется в функциональных терминах. Именно: заданы „эмпирически“ графики функций $f(x)$ и $g(x)$; требуется построить по точкам графики функций $s(x) = f(x) + g(x)$, $d(x) = f(x) - g(x)$, $p(x) = f(x)\,g(x)$, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. О проделанном Упражнении 9 не помешает вспомнить в своё время.

2. Позволительно дать преподавателю кое-какие советы по поводу того, как в Упражнении 9 следует от руки чертить графики функций f и g. Существенно, чтобы графики s, d, p и q поместились на чертеже. Для этого достаточно чертить графики так, чтобы все ординаты f заключались между 0,4 и 0,7, все ординаты g — между 0,5 и 0,8. В самом деле, из неравенств

$$0{,}4 < f < 0{,}7 \text{ и } 0{,}5 < g < 0{,}8$$

следуют непременно неравенства

$$\begin{array}{ll} 0{,}9 < s < 1{,}5 & \quad 0{,}2 < p < 0{,}56 \\ -0{,}4 < d < 0{,}2 & \quad 0{,}5 < q < 1{,}4 \end{array}$$

и ни один график не выйдет за пределы страницы. Можно условиться с классом, что график f будет проведён красным, а график g — синим карандашом. Графики могут быть или плавные кривые, как на черт. 16, или ломаные линии, как на чертеже 17.

3. Неравенство $g > 0{,}5$ обеспечивает непрерывность всех четырёх графиков s, d, p и q при условии непрерывности f и g. Учащимся следует рекомендовать заполнять таблицу на основном листе по строчкам и после заполнения каждой строчки s, d, p, q немед-

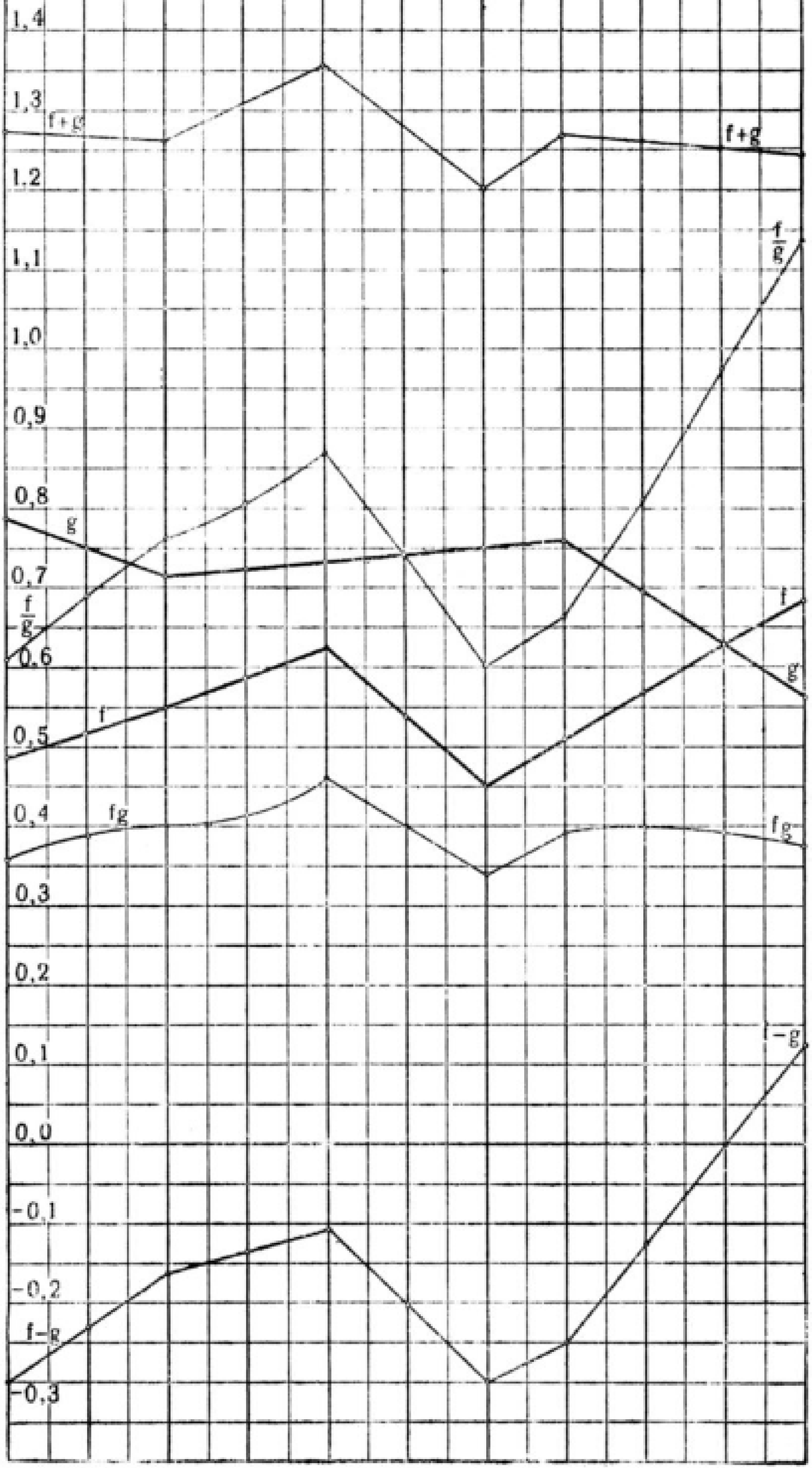

1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-0,1
-0,2
-0,3
f+g
f+g
$\frac{f}{g}$
$\frac{f}{g}$
g
g
f
f
fg
fg
f−g
f−g

Чертёж 17

ленно строить соответствующий график. Каждый учащийся будет с интересом следить за тем, как постепенно будут меняться ординаты каждого графика при переходе с одной вертикали на другую, и это послужит контролем, так как резкие скачки будут свидетельствовать об арифметических ошибках.

4. Необходимо направить внимание учащихся на то, как изменяется сумма, разность, произведение и отношение двух величин при изменении самих величин. Так, на чертеже 16 видно со всей наглядностью, что, например:

1) При движении от первой ко второй вертикали f и g растут, значит растёт также их сумма s и произведение p.

2) При движении от третьей к четвёртой вертикали f убывает, g возрастает; значит разность d и отношение g убывают.

3) При движении от восьмой к одиннадцатой вертикали f и g убывают, значит сумма s и произведение p — также и т. д.

Стоит также заметить, что $d=f-g$ положительно или отрицательно, а $q=\frac{f}{g}$ — больше единицы или меньше, смотря по тому, будет ли $f>g$ или $f<g$.

5. При просмотре работ с ломаными графиками (см. черт. 17) преподаватель должен иметь в виду следующее: так как отрезки прямых изображаются линейными функциями (многочленами первой степени) и так как сумма и разность линейных функций, очевидно, — также линейные функции, тогда как произведение является трёхчленом второй степени, а отношение — дробной линейной функцией, то в этом случае

1) графики s и d — также составляются из отрезков прямых,

2) график p — из отрезков парабол с вертикальной осью,

3) график g — из отрезков гипербол с вертикальной и горизонтальной асимптотами.

6. Пропедевтика Упражнения 9 может быть значительно „оживлена“ такими примерами:

1) Заданы графически (по годам) продукция x завода А и продукция y завода В; сделать: а) график продукции, доставляемой совместно обоими заводами $(x+y)$, в) график, показывающий, на сколько продукция завода А превышает продукцию завода В $(x-y)$, с) график, пока-

зывающий, во сколько раз продукция завода А превышает продукцию завода В $\left(\frac{x}{y}\right)$.

2) Задана графически (по годам) продукция x завода (число выпущенных за год автомобилей) и задана, также графически, из года в год меняющаяся продажная стоимость автомобиля y. Сделать график (по годам) валовой прибыли завода xy.

7. Для разнообразия можно взять циркуль и пользоваться им при построении ординат. Это также — метод контроля.

10. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ (многочлены первой степени)

Упражнение имеет в виду пропедевтически познакомить учащихся с линейными функциями и их графическим представлением; в частности, направляет внимание к коэффициентам m и n в уравнении $y=mx+n$ и к определению отрезков, образуемых прямой $Ax+By+C=0$ на осях.

Рассмотрим очень простое уравнение

$$y=\frac{2}{3}x+5;$$

составим таблицу значений y, соответствующих целым значениям x хотя бы в пределах от -10 до $+10$, и затем наметим график уравнения.

При составлении таблички вполне целесообразно ввести в неё вспомогательный столбец, в котором будут выписаны значения величины $\frac{2}{3}x$.

Подставляя вместо x сначала целые положительные значения, мы получаем табличку:

x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x+5$
1	$\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{3}$
2	$1\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$
3	2	7
4	$2\frac{2}{3}$	$7\frac{2}{3}$
5	$3\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$

x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x+5$
6	4	9
7	$4\frac{2}{3}$	$9\frac{2}{3}$
8	$5\frac{1}{3}$	$10\frac{1}{3}$
9	6	11
10	$6\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$

Будучи продолжена в сторону отрицательных значений x, табличка имеет вид:

x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x+5$
-1	$-\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{3}$
-2	$-1\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$
-3	-2	3
-4	$-2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
. . .	. . . .	. . .

Отмечая на чертеже сначала те точки, которые соответствуют уравнению $y=\frac{2}{3}x$, т. е., заимствуя ординаты из вспомогательного столбца, мы получаем вспомогательный график в виде ряда точек, расположенных на прямой линии, которая проходит через начало координат (см. черт. 18 на стр. 90). Едва ли у вас возникнет сомнение в том, что, давая букве x промежуточные дробные значения, мы получили бы точки, лежащие на этой же самой прямой: но если вы в этом не уверены — попробуйте сами взять какое захотите дробное значение.

На чертеже выделены (отмечены кружочками) те точки графика, которые имеют обе координаты — не только абсциссу, но и ординату — целыми, т. е. лежат в вершинах координатной сетки. Следить за вершинами сетки, через которые проходит график прямой, и выделять их — является очень полезным практическим навыком.

Обращаясь теперь к третьему столбцу таблицы, в котором выписаны значения функции $\frac{2}{3}x+5$, мы видим, что числа этого столбца на 5 превышают соответствующие числа столбца для $\frac{2}{3}x$: это значит, что каждую точку вспомогательного графика нужно на 5 единиц передвинуть вверх, чтобы получить интересующий нас график функции $y=\frac{2}{3}x+5$. Очевидно, вновь получаемая прямая уже не пройдёт через начало координат, а будет образовывать на оси Oy отрезок 5, т. е. пересечётся с этой осью в точке с ординатой 5.

Рассмотренное уравнение имеет то несомненное преимущество, что оно решено относительно y, что даёт возможность легко строить график „по точкам"

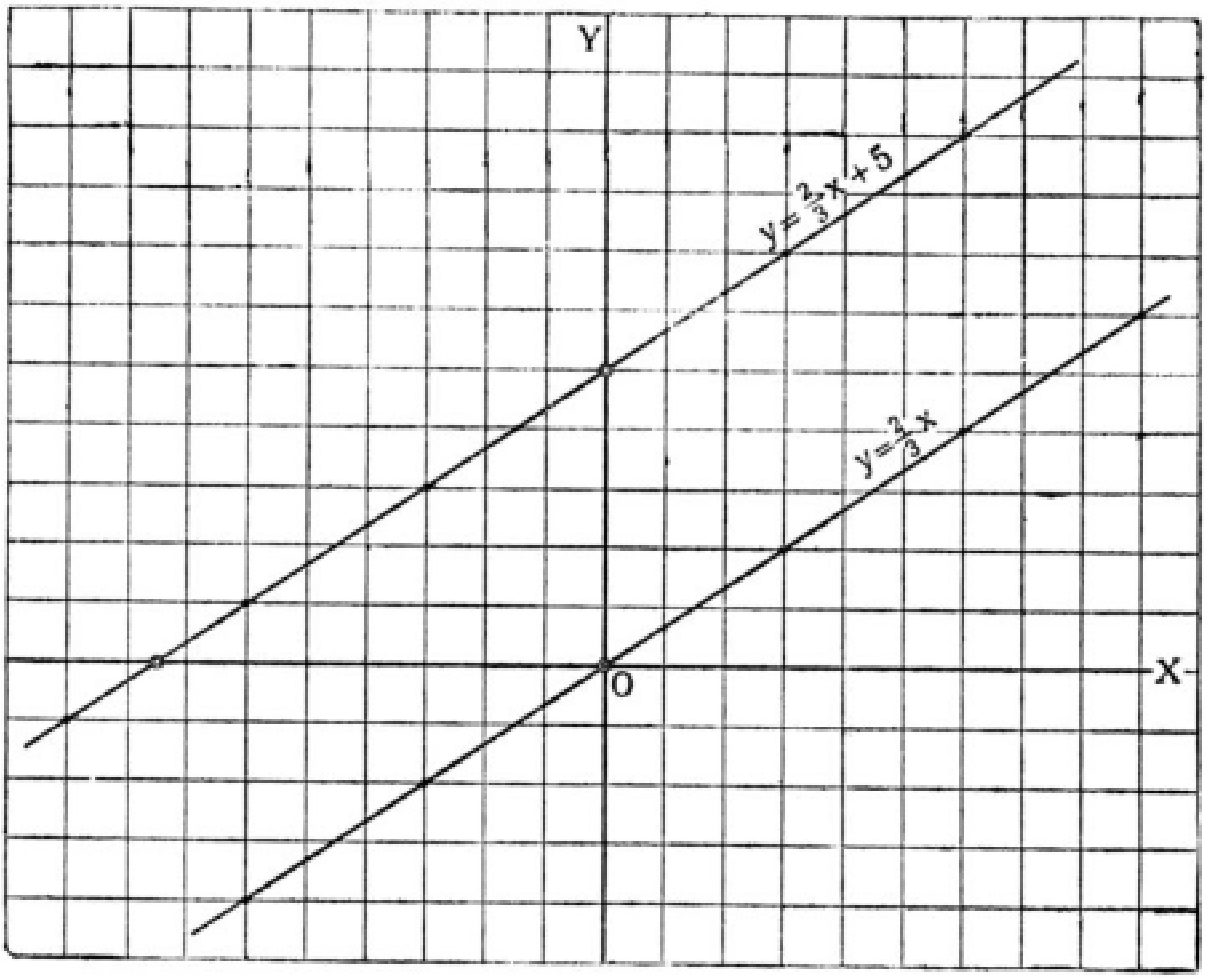


Чертёж 18

так, как мы это делали. Но оно несколько неудобно в том смысле, что содержит дробный коэффициент при букве. Обыкновенно уравнение прямой стараются избавить от дробных коэффициентов, умножая на надлежащий множитель, и затем переносят все члены в левую часть; если коэффициент при x оказывается отрицательным, то меняют знак.

Поэтому наше уравнение может быть записано ещё в ином виде, именно,

$$2x - 3y + 15 = 0.$$

Глядя на это уравнение, можно легко, почти без вычислений, ответить на вопрос: какие отрезки прямая образует на осях? Во всех точках оси Oy абсцисса x равна нулю; полагая в уравнении $x=0$ (прикрывая рукой член $2x$), мы получаем (легко сосчитать в уме!), что y равно 5 (мы эту точку пересечения с осью Oy уже знали раньше). Во всех точках оси Ox ордината y равна нулю; полагая в уравнении $y=0$ (прикрывая рукой член $-3y$), получим, что $x=-7\frac{1}{2}$. Точки пересечения нашей прямой с обеими осями на чертеже 18 изображены кружочками.

Упражнение 10

Составить таблицы шести функций

(1) $y = mx$, (2) $y = mx + n$, (3) $y = mx - n$,
(4) $y = -mx$, (5) $y = -mx + n$, (6) $y = -mx - n$,

давая x целые значения в пределах от -10 до $+10$.

На одном и том же чертеже (координатной сетке) наметить шесть соответствующих графиков прямых линий.

Начало координат поместить посредине листа, масштаб взять: $1=1$ клеточка. Продолжить графики на весь лист, выделяя все те точки с целыми координатами (вершины сетки), через которые проходят рассматриваемые графики.

Привести все уравнения к виду:

$$Ax + By + C = 0$$
$$(A,\ B,\ C \text{ — целые; } A > 0).$$

Указать отрезки, которые каждая из прямых образует на каждой из осей.

Образец ($m=\frac{2}{3}$, $n=5$)

Основной лист (черт. 19)

	Отрезки на осях	
	Ox	Oy
(1) $2x-3y=0$	0	0
(2) $2x-3y+15=0$	$-7\frac{1}{2}$	$+5$
(3) $2x-3y-15=0$	$+7\frac{1}{2}$	-5
(4) $2x+3y=0$	0	0
(5) $2x+3y-15=0$	$+7\frac{1}{2}$	$+5$
(6) $2x+3y+15=0$	$-7\frac{1}{2}$	-5

Вспомогательный лист

x	$\frac{2}{3}x$	$-\frac{2}{3}x+5$	$\frac{2}{3}x-5$	$-\frac{2}{3}x$	$-\frac{2}{3}x+5$	$-\frac{2}{3}x-5$
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
-2	$-1\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	$-6\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$	$-3\frac{2}{3}$
-1	$-\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{3}$	$-5\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{3}$	$-4\frac{1}{3}$
0	0	5	-5	0	5	-5
1	$\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{3}$	$-4\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{3}$	$-5\frac{2}{3}$
2	$1\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$	$-3\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	$-6\frac{1}{3}$
3	2	7	-3	-2	3	-7
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

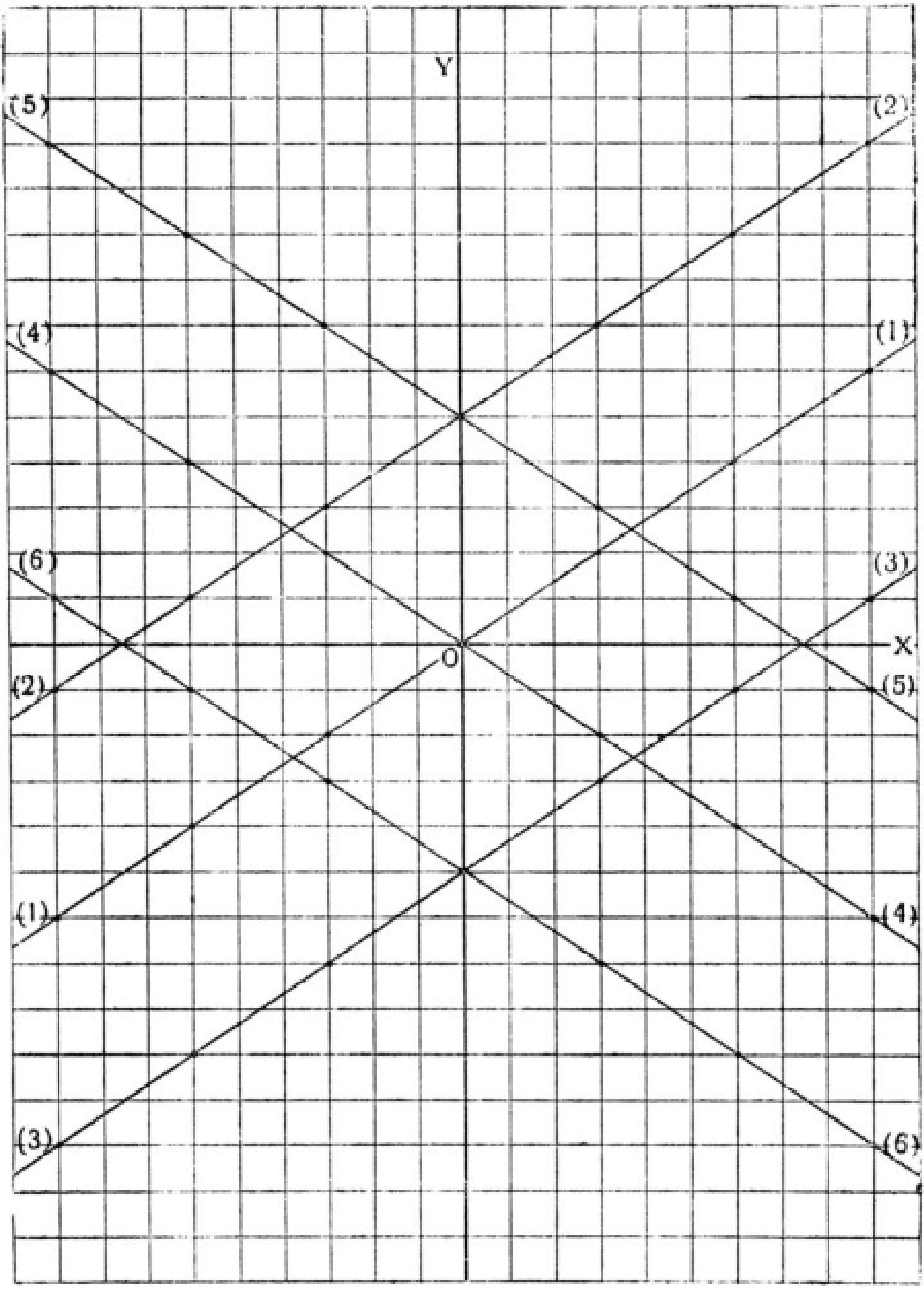


Чертёж 19

Методические замечания

1. Рекомендуются значения параметров:

$$m = 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5};$$

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Всего $10 \times 4 = 40$ комбинаций: в случае надобности число это нетрудно и увеличить.

2. Тщательное выписывание таблицы на данном этапе едва ли бесполезно. Таблицу следует заполнять по столбцам, одновременно отмечая точки.

3. Очень скоро учащиеся освоятся с тем, что „линейное уравнение представляет прямую“, привыкнут к этому; составлять таблицы линейных функций будет казаться им излишним и надоедливым делом. Беды в том нет! Да и в самом деле: чтобы провести прямую, ведь достаточно иметь две её точки (например, точки на осях). Плохо другое: поверхностное отношение распространится и на график — прямую начнут проводить небрежно, как попало, или станут пользоваться линейкой.

Вот почему необходимо приучать выделять вершины сетки. Не так важно, чтобы прямая была безупречна в чертёжном смысле; пусть она будет проведена хоть дрожащей рукой, но зато идёт через те точки, через какие ей надлежит идти.

4. Для коэффициента при x в уравнении, решённом относительно y, русская математическая терминология знает только одно наименование „угловой коэффициент“; имеется в виду, что этот коэффициент равен тангенсу угла, который прямая делает с осью Ox (при определённых условиях относительно направления отсчёта). Нам казалась бы целесообразной замена этого термина менее громоздким и не связанным с тригонометрией: хорошо было бы ввести в школьный обиход термин „наклон“ (по-английски slope).

Так, в приведённом выше примере три прямые имеют наклон $\frac{2}{3}$, три другие — наклон $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

5. Упражнение 10 уместно предложить в тот момент, когда класс уже познакомлен с координатной сеткой, но ещё не утвердился в том положении, что „график линейного уравнения есть прямая линия“.

11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Упражнение имеет в виду: 1) тренировку в решении систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, 2) разъяснение геометрического смысла этой операции, 3) укрепление навыка пользоваться геометрическим представлением линейной зависимости.

Известно несколько различных способов решения линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными. Те, кому с этими способами часто приходилось иметь дело, знают, что наилучший из них — так называемый „способ сложения и вычитания“, или, иначе, „способ уравнивания коэффициентов“. Он заключается в том, что данные уравнения умножают на надлежащим образом подобранные множители с таким расчётом, чтобы затем, складывая или вычитая полученные уравнения, получить уравнение, содержащее только одну из неизвестных букв: другая таким образом оказывается „исключённой“.

Мы будем здесь решать системы именно с помощью „способа сложения и вычитания“, но называть его будем лучше просто „способом сложения“, так как, вместо того, чтобы умножать уравнение на положительный множитель и потом вычитать, можно умножать на отрицательный множитель и затем складывать.

Пусть дана система уравнений

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y-18&=0\\ 5x-7y+35&=0 \end{aligned}\right.$$

Чтобы исключить y, достаточно сложить уравнения, предварительно помножив первое на 7, второе — на 2. Чтобы исключить x, достаточно сложить уравнение, предварительно помножив первое на 5, второе на (—3). Притом удобнее при решении системы свободные члены писать в правой части. Итак, запись решения будет такова:

$$\begin{array}{l|c|c|l}
\left\{\begin{aligned} 3x+2y&=18\\ 5x-7y&=-35 \end{aligned}\right. & \begin{matrix}7\\2\end{matrix} & \begin{matrix}5\\-3\end{matrix} & \\ \hline
31x \qquad\quad = 56 & & & x=\dfrac{56}{31} \\
\qquad 31y=195 & & & y=\dfrac{195}{31}\,.
\end{array}$$

Промежуточные уравнения опущены, так как, не напрягая мысли, можно подсчёт легко провести в уме. При умножении на 7 и 2 мы скажем: „Коэффициент при x равен $3 \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 21 + 10 = 31$, коэффициент при y обращается в нуль, свободный член равен $18 \cdot 7 + (-35) \cdot 2 = 126 - 70 = 56$". При умножении на 5 и на (-3) скажем: „Коэффициент при x обращается в нуль, коэффициент при y равен $2 \cdot 5 + (-7) \cdot (-3) = 10 + 21 = 31$, свободный член равен $18 \cdot 5 + (-35) \cdot (-3) = 90 + 105 = 195$". Дальнейшее не требует объяснений.

Тот, кто решает систему уравнений, должен понимать геометрический смысл выполняемого вычисления. Решить систему — значит найти такую пару значений x и y, которая удовлетворяет одновременно обоим данным уравнениям. Другими словами, точка координатной плоскости Oxy, имеющая координаты, равные этим значениям x и y, лежит одновременно и на графике первого уравнения и на графике второго, т. е. она есть точка пересечения двух графиков. Так, решая систему двух линейных уравнений, мы находим точку пересечения двух соответствующих прямых. Отсюда ясно, что чертёж, отвечающий данным задачи, даёт возможность проконтролировать правильность решения. Нужно нарисовать в координатной плоскости две прямые, являющиеся графиками данных уравнений (для этого достаточно отметить точки пересечения каждого графика с осями координат!), и затем посмотреть, совпадают ли координаты точки пересечения этих двух прямых с найденными значениями x и y.

Упражнение 11

Даны четыре линейных уравнения. Решить способом сложения каждую из шести систем, которые могут быть получены, комбинируя данные уравнения по два.

Наметить в координатной плоскости графики данных четырёх уравнений. Проконтролировать правильность решения шести систем посредством рассмотрения координат точек пересечения четырёх графиков.

Образец

Графики (см. чертёж 20 на стр. 99)

Даны уравнения:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 3x+2y-18=0\\
(2) & 5x-7y+35=0\\
(3) & x+3y+3=0\\
(4) & 3x-4y-24=0
\end{array}
$$

Решение системы (1) — (2)

$$
\left\{\begin{array}{rcr|c|r}
3x+2y &=& 18 & 7 & 5\\
5x-7y &=& -35 & 2 & -3
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\hline
31x = 56 & x=1\frac{25}{31}\\
31y=195 & y=6\frac{9}{31}
\end{array}
$$

Решение системы (1) — (3)

$$
\left\{\begin{array}{rcr|r|r}
3x+2y &=& 18 & 3 & -1\\
x+3y &=& -3 & -2 & 3
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\hline
7x = 60 & x=8\frac{4}{7}\\
7y=-27 & y=-3\frac{6}{7}
\end{array}
$$

Решение системы (1) — (4)

$$
\left\{\begin{array}{rcr|c|r}
3x+2y &=& 18 & 2 & 1\\
3x-4y &=& 24 & 1 & -1
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\hline
9x = 60 & x=6\frac{2}{3}\\
6y=-6 & y=-1
\end{array}
$$

Решение системы (2) — (3)

$$
\left\{\begin{array}{rcr|c|r}
5x-7y &=& -35 & 3 & -1\\
x+3y &=& -3 & 7 & 5
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\hline
22x = -126 & x=-5\frac{8}{11}\\
22y=20 & y=\frac{10}{11}
\end{array}
$$

Решение системы (2) — (4)

$$\left\{\begin{array}{rcr|r|r} 5x-7y & = & -35 & -4 & -3 \\ 3x-4y & = & 24 & 7 & 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcr} x & = & 308 \\ y & = & 225 \end{array}$$

Решение системы (3) — (4)

$$\left\{\begin{array}{rcr|r|r} x+3y & = & -3 & 4 & 3 \\ 3x-4y & = & 24 & 3 & -1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcr|l} 13x & = & 60 & x = 4\frac{8}{13} \\ 13y & = & -33 & y = -2\frac{7}{13}\,. \end{array}$$

Методические замечания

1. Уравнения можно распределить следующим образом. На доске пишутся четыре уравнения с восьмью буквенными параметрами A, B, A', B', A'', B'', A''', B''':

$$\begin{array}{ll} (1) & Ax + By - AB = 0 \\ (2) & A'x - B'y + A'B' = 0 \\ (3) & A''x + B''y + A''B'' = 0 \\ (4) & A'''x - B'''y - A'''B''' = 0. \end{array}$$

Затем каждый учащийся получает восемь чисел из цифрового набора (с предварительно выброшенными нулями) и ставит их на места восьми параметров.

Так, уравнения в приведённом выше образце возникли с помощью следующих значений, полученных посредством выемки наугад из цифрового набора:

$$A=9,\ \ B=6,\ \ A'=5,\ \ B'=7,$$
$$A''=1,\ \ B''=3,\ \ A'''=6,\ \ B'''=8.$$

2. Вспомогательный лист в данном упражнении является излишним. Если бы выполнение „в уме" кое-каких вычислений могло оказаться затруднительным, то учащийся пусть проделает их где угодно (только не на основном листе!), и требовать их предъявления незачем.

3. Как строить на чертеже графики прямых? Есть два способа: или решить уравнение относительно y и

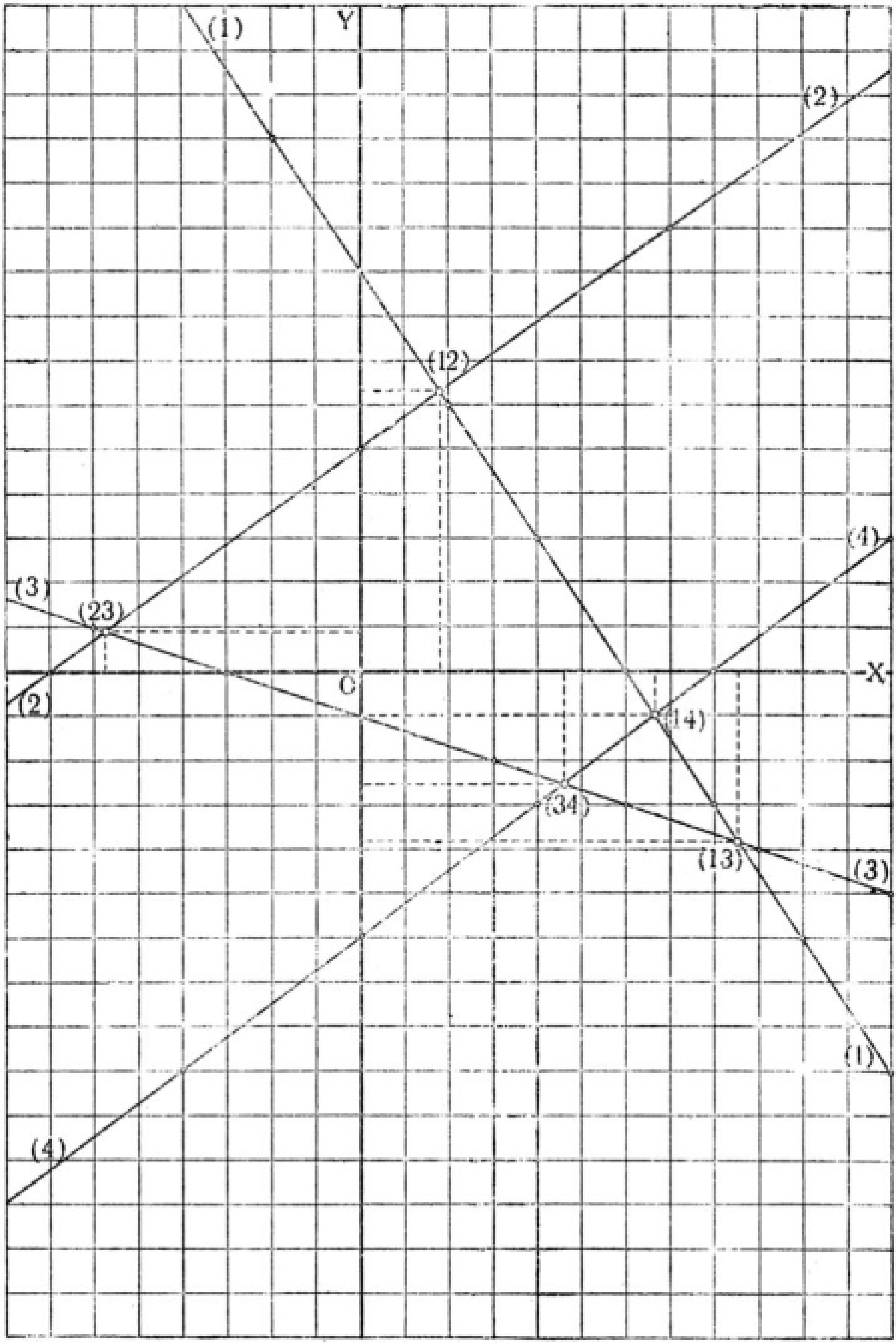


Чертёж 20

строить „по точкам“ или найти точки пересечения с осями и через них вести прямую. Второй способ, разумеется, является более совершенным; но нельзя допускать его автоматического применения, и если преподаватель видит, что ученик (или класс) ещё не усвоил сути дела, — пусть лучше рекомендует первый способ. Вместе с тем, какой бы из двух способов ни применялся, совершенно обязательно, чтобы все вершины координатной сетки были выделены на графиках (см. Упражнение 10).

4. Можно рекомендовать помещать начало координат посредине страницы и брать масштаб $1=1$ клеточка. Однако при этом нельзя гарантировать, что все точки пересечения окажутся в пределах чертежа. Так, в нашем примере точка пересечения прямых (2) и (4) имеет координаты (308, 225), т. е. находится где-то далеко вправо и вверх. Это происходит по той причине, что прямые (2) и (4) почти параллельны: их наклоны $\left(\frac{5}{7} \text{ и } \frac{3}{4}\right)$ отличаются очень мало. Не исключён, и заслуживает самого внимательного рассмотрения, если встретится, и тот случай, когда две прямые параллельны, имеют равные наклоны: тогда точки пересечения нет — система несовместна.

5. Центр тяжести настоящего упражнения — не столько в технике решения линейной системы, сколько в графическом контроле. Если чертёж „не сходится“ с числовыми результатами (координаты точек пересечения заметно отличаются от решения соответствующей системы), — работу нельзя считать выполненной.

6. При проверке преподавателю следует не только проследить за точками пересечения, но и за отрезками данных прямых на осях.

12. СРАВНЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

Упражнение имеет в виду: 1) укрепить в сознании учащихся идею порядка (расположение чисел по величине), 2) предоставить им дальнейшую тренировку в пользовании знаком неравенства, 3) дать материал для несложных дедуктивных заключений, 4) развивать привычку к коллективной работе.

Предположим, что в классе 30 учеников. Представим себе, что между ними распределены билетики с написанными на них последовательными целыми числами от 1 до 30 и требуется расположить учеников в порядке нумерации билетиков. Самый простой и быстрый способ сделать это заключался бы в том, чтобы спросить прежде всего: „У кого билет № 1?“ — и поставить того, кому достался этот билет, первым; затем поставить вторым того, у кого билет № 2, и т. д. — до билета № 30.

Однако допустим теперь, что на билетах, распределяемых между учениками того же класса, были бы написаны не последовательно, а наугад выбранные различные многозначные — например, четырёхзначные числа. Можно было бы спросить: „У кого самое маленькое число?“, — но на этот вопрос каждому из учеников, не глядя на чужие билеты, было бы трудно ответить, так как он не знал бы, является ли его число бо́льшим или меньшим, чем другие. Или сразу несколько человек пожелали бы заявить, что у них — наименьшее число; и тогда пришлось бы выяснять, кто же всё-таки из них прав.

Есть другой способ — тот, который никто не задумается применить, если нужно расположить в порядке нумерации лежащие смешанными, большой кучей, те самые билеты, которые, по нашему предположению, были распределены между учениками. Раз известно, что все числа — четырёхзначные, расположим билеты на десять маленьких кучек, относя к первой кучке те, номера которых заключены между 1000 и 1999, ко второй — те, номера которых заключены между 2000 и 2999 и т. д. Если в какой-нибудь кучке билетов окажется немного, их нетрудно будет расположить в порядке нумерации; в противном случае расклассифицируем по сотням; и так, в конце концов, справимся с поставленной задачей.

Та же самая задача — расположить заданные числа в порядке возрастания — в иных случаях может оказаться и более сложной. Если бы классу, состоящему из 30 учеников, было предложено „стать по росту“, то, хотя никто, может быть, своего роста, выраженного в сантиметрах и долях сантиметра, точно и не знает, но выстроиться по росту можно очень быстро, так как каждый сразу видит, кто из его товарищей ниже, а кто выше его самого. Другое дело, если бы было предложено „стать по весу“: ведь на-глаз не всегда видно, кто тяжелее: я или мой товарищ. Да ещё представим себе, что у нас есть весы, но нет гирь для взвешивания. При наличии гирь потребовалось бы не так уж много времени для того, чтобы взвесить всех по очереди достаточно точно, записывая результаты, а затем полученные в итоге числа — расположить в порядке возрастания с помощью уже описанного выше приёма. Но если гирь нет, то „стать по весу“ тоже возможно; однако, чтобы выяснить, кто из двоих в данной паре весит больше, пришлось бы обоим встать на весы: одному на одну чашку, другому — на другую. Вы легко сосчитаете, что из 30 учащихся можно образовать 435 пар, и вместе с тем согласитесь, что для достижения поставленной цели нам не придётся производить 435 взвешиваний, а пожалуй, удастся обойтись меньшим числом. Как бы то ни было, времени на всю операцию уйдёт порядочно: трудно предвидеть — больше или меньше, чем если бы были налицо гири и производилось бы очень точное взвешивание.

Стоит труда подумать над тем, как следовало бы поставить решение нашей задачи в том случае, если бы при отсутствии гирь в нашем распоряжении было бы сколько угодно весов с чашками, на которых могли бы сравнивать свои веса (не узнавая их) любые двое желающих.

Если требуется узнать, которое из двух чисел больше, то в некоторых случаях можно это сделать различными способами.

Например, при сравнении чисел $\frac{4}{19}$ и $\frac{5}{23}$ достаточно превратить их в десятичные дроби

$$\frac{4}{19} = 0{,}210\ldots, \qquad \frac{5}{23} = 0{,}216\ldots$$

и тогда видно, что

$$\frac{4}{19} < \frac{5}{23}.$$

Такой способ напоминает абсолютное взвешивание при помощи гирь, причём роль гирь играют десятичные дроби.

Но можно решить тот же вопрос посредством небольшого рассуждения: $\frac{4}{19}$ меньше чем $\frac{5}{23}$, так как

$4 \cdot 23 < 5 \cdot 19$ (см. упражнение 6). Такой способ напоминает сравнительное взвешивание на двух чашках весов без гирь.

Всякое, целое или дробное, число может быть записано по десятичной системе так же, как всякий предмет может быть взвешен с помощью гирь. Например:

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}442\ldots$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что с одной стороны

$$(1{,}442)^3 < 3;$$

с другой

$$(1{,}443)^3 > 3.$$

Извлекать корни из чисел довольно трудно, и поэтому имеет важное значение то обстоятельство, что с помощью небольших рассуждений сравнивать по величине числовые выражения, содержащие радикалы, часто не представляет труда. Такое сравнение напоминает взвешивание на двух чашках весов без гирь.

Приведём несколько примеров.

(1) Что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$?

Сравним пятнадцатые степени от этих чисел. Мы видим, что

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} = 3^5 = 243, \qquad \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15} = 5^3 = 125,$$

и потому

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} > \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15}.$$

Отсюда сейчас же следует, что

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}.$$

(2) Что больше: $1 + \sqrt{7}$ или $\sqrt{11}$?

Сравним квадраты данных чисел:

$$(1 + \sqrt{7})^2 = 1 + 2\sqrt{7} + 7 = 8 + 2\sqrt{7}, \qquad (\sqrt{11})^2 = 11.$$

Является ли $8+2\sqrt{7}$ числом, большим или меньшим чем 11, — зависит от того, что больше: $2\sqrt{7}$ или 3? Но последний вопрос решается просто, так как $\sqrt{7}$, очевидно, больше чем 2; значит $2\sqrt{7}$ больше чем 4, а следовательно, и подавно больше чем 3.

Итак:

$$1+\sqrt{7}>\sqrt{11}.$$

(3) Что больше:

$$8\sqrt{3}+25\sqrt{2} \text{ или } 17\sqrt{3}+14\sqrt{2}?$$

Мы не знаем, который из трёх знаков нужно выбрать в соотношении

$$8\sqrt{3}+25\sqrt{2} \gtreqless 17\sqrt{3}+14\sqrt{2}.$$

Но ни равенство, ни неравенство не нарушается, если к обеим частям прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же. Вычтем $8\sqrt{3}+14\sqrt{2}$, и получим:

$$11\sqrt{2} \gtreqless 9\sqrt{3}.$$

Если в первом соотношении стоит знак $>$, то и во втором; если в первом стоит знак $=$, то и во втором; если в первом знак $<$, то и во втором. И, очевидно, обратно. Знаки, как говорят, находятся в соответствии.

Ни равенство, ни неравенство, скажем опять, не нарушится, если обе части возведём в квадрат:

$$242 \gtreqless 243.$$

В последнем соотношении снова знаки находятся в соответствии со знаками в предыдущих соотношениях; и так как сомнений нет в том, что

$$242<243,$$

то, следовательно,

$$8\sqrt{3}+25\sqrt{2}<17\sqrt{3}+14\sqrt{2}.$$

Чтобы придать этому рассуждению законченный вид, нужно „начать с конца“. Очевидно,

$$242 < 243.$$

Значит (извлекаем корни):

$$\sqrt{242} < \sqrt{243},$$

т. е.

$$11\sqrt{2} < 9\sqrt{3}.$$

Значит (прибавляем по $8\sqrt{3}+14\sqrt{2}$):

$$8\sqrt{3}+25\sqrt{2} < 17\sqrt{3}+14\sqrt{2}.$$

Упражнение 12

Каждый учащийся данного класса получает на билетике одно число вида

$$m\sqrt{3}+n\sqrt{2}$$

(где m и n — целые). Предлагается общими усилиями расположить все эти числа в порядке возрастания.

Именно, требуется:

1. От всего класса — составить список по схеме:

Порядковый номер	Фамилия учащегося	Его число

причём с возрастанием порядковых номеров должны возрастать и соответствующие числа.

2. От каждого учащегося в отдельности — дать доказательство 1) того, что его число больше, чем число непосредственно предшествующего по списку товарища, и 2) того, что его число меньше, чем число непосредственно следующего по списку товарища[1].

---

[1] Из этих условий, как следствие, вытекает, что если, например, Иванов стоит в списке раньше Фёдорова, то число Иванова меньше чем число Фёдорова.

Образец

Начало списка

1.	Петров	$34\sqrt{2}$
2.	Алексеев	$\sqrt{3}+33\sqrt{2}$
3.	Смирнов	$24\sqrt{3}+5\sqrt{2}$
4.	Викторов	$2\sqrt{3}+32\sqrt{2}$

. . . .

Индивидуальная работа (Смирнова)

1) $\underline{\sqrt{3}+33\sqrt{2}<24\sqrt{3}+5}$?

Доказательство.

$$1568<1587$$

Извлечём корень:

$$28\sqrt{2}<23\sqrt{3}.$$

Прибавим к обеим частям $\sqrt{3}+5\sqrt{2}$:

$$\sqrt{3}+33\sqrt{2}<24\sqrt{3}+5\sqrt{2}.$$

2) $24\sqrt{3}+5\sqrt{2}<2\sqrt{3}+32\sqrt{2}$?

Доказательство.

$$1452<1458.$$

Извлечём корень:

$$22\sqrt{3}<27\sqrt{2}.$$

Прибавим к обеим частям $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$:

$$24\sqrt{3}+5\sqrt{2}<2\sqrt{3}+32\sqrt{2}.$$

Методические замечания

1. Распределение значений *m* и *n* можно провести в двух вариантах: *A* (нормальном) и *B* (облегчённом). 30 чисел варианта *A* даются таблицей

m	n	m	n	m	n
0	34	10	23	20	10
1	33	11	22	21	9
2	32	12	20	22	8
3	31	13	19	23	7
4	30	14	18	24	5
5	29	15	17	25	4
6	28	16	15	26	3
7	26	17	14	27	2
8	25	18	13	28	1
9	24	19	12	29	0

Получающиеся из таблицы числа вида $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}$ связаны цепью неравенств:

$$\begin{aligned}
&34\sqrt{2} < \sqrt{3}+33\sqrt{2} < 24\sqrt{3}+5\sqrt{2} < \\
&< 2\sqrt{3}+32\sqrt{2} < 20\sqrt{3}+10\sqrt{2} < 7\sqrt{3}+26\sqrt{2} < \\
&< 16\sqrt{3}+15\sqrt{2} < 25\sqrt{3}+4\sqrt{2} < 3\sqrt{3}+31\sqrt{2} < \\
&< 12\sqrt{3}+20\sqrt{2} < 21\sqrt{3}+9\sqrt{2} < 8\sqrt{3}+25\sqrt{2} < \\
&< 17\sqrt{3}+14\sqrt{2} < 26\sqrt{3}+3\sqrt{2} < 4\sqrt{3}+30\sqrt{2} < \\
&< 13\sqrt{3}+19\sqrt{2} < 22\sqrt{3}+8\sqrt{2} < 9\sqrt{3}+24\sqrt{2} < \\
&< 18\sqrt{3}+13\sqrt{2} < 27\sqrt{3}+2\sqrt{2} < 5\sqrt{3}+29\sqrt{2} < \\
&< 14\sqrt{3}+18\sqrt{2} < 23\sqrt{3}+7\sqrt{2} < 10\sqrt{3}+23\sqrt{2} < \\
&< 19\sqrt{3}+12\sqrt{2} < 28\sqrt{3}+\sqrt{2} < 6\sqrt{3}+28\sqrt{2} < \\
&< 15\sqrt{3}+17\sqrt{2} < 11\sqrt{3}+22\sqrt{2} < 29\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Числа варианта *B* берутся согласно двойной таблице, в которой m меняется от 1, скажем, до 6, а n — от 1 до 5. Или — иначе, в зависимости от числа учеников в классе.

2. Упражнение 12 своевременно провести в тот момент, когда радикальные обозначения уже введены и указан приём вычисления квадратных корней „методом проб“ (наощупь), но регулярный приём (алгорифм) извлечения квадратного корня ещё неизвестен.

После того как этот приём будет объяснён и усвоен, можно снова вернуться к Упражнению 12 и, раздав работы их авторам, предложить представить данные числа в виде десятичных дробей (достаточно — с двумя знаками после запятой) и потом проверить ещё раз расположение чисел по списку.

Вычисление, конечно, следует производить по схеме

$$24\sqrt{3}+5\sqrt{2}=\sqrt{1728}+\sqrt{50};$$

иначе погрешность, возникающая при округлении $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$, слишком возрастает при умножении на 24 и 5.

Упражнение 12 — домашнее. Необходимо, чтобы работа протекала организованно. В классе нужно заранее обсудить, по какой системе её провести. Система, согласно которой каждый учащийся действовал бы один за другим, находя своё место между предыдущими, в целом отняла бы много времени. При этой системе первому действующему вообще нечего было бы делать, а больше всего трудиться пришлось бы последнему[1].

4. Полезно из числа желающих выбрать „распорядителя“, который будет вести список и представит его по окончании всей работы; и дать ему на всякий случай пару помощников.

5. Упражнение 12 не предполагает применения алгорифма извлечения корня или пользования таблицами корней, но ни то ни другое не запрещено и не лишает работу её смысла. Лучше всего, если представление данных чисел в виде десятичных дробей будет использовано как контроль.

6. Обратите внимание на облегчённый вариант упражнения 12: разбить класс на группы — по 10 или по 5 человек и от каждой группы потребовать того же, что в основном варианте требуется от всего класса.

---

[1] Но и последнему пришлось бы сделать не более 5 сравнений. Пусть 29 чисел уже расположены в возрастающем порядке. Тогда 30-е сравним сначала с 15-м, и если оно окажется меньше, то, дальше, — с 8-м, а если больше, то с 22-м и т. д., деля промежутки пополам.

13. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Упражнение имеет в виду тренировку в выполнении алгорифма извлечения квадратного корня из чисел, с применением графического контроля.

Процедура (алгорифм) извлечения корня квадратного из целых чисел и десятичных дробей достаточно известна; на ней нет надобности здесь останавливаться.

Упражнение 13

Извлечь, с округлением в сотых, квадратный корень из пяти данных трёхзначных чисел; извлечь, с округлением в десятитысячных, квадратный корень из трёх данных пятизначных чисел.

Все результаты проверить методом графического контроля; три последних результата (большей точности), кроме того, проверить сокращённым умножением.

Образец

Основной лист

x	$y=\sqrt{x}$
0,26	0,51
3,64	1,91
4,98	2,23
1,35	1,16
7,32	2,71
7,1430	2,6726
3,3962	1,8429
2,5846	1,6077

График (см. чертёж 22 на стр. 111)

Вспомогательный лист

$$\sqrt{0{,}26}=0{,}509\ldots\sim 0{,}51$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{25} \\
\hline
1\,009 & 10000 \\
9 &
\end{array}$$

$$\sqrt{7{,}1430}=2{,}67263\ldots\sim 2{,}6726$$

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{4} \\
\hline
46 & 314 \\
6 & 276 \\
\hline
527 & 3830 \\
7 & 3689 \\
\hline
5342 & 14100 \\
2 & 10684 \\
\hline
53446 & 341600 \\
6 & 320576 \\
\hline
534523 & 21024
\end{array}$$

и т. д.

$$\sqrt{3{,}64}=1{,}907\ldots\sim 1{,}91$$

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{1} \\
\hline
29 & 264 \\
9 & 261 \\
\hline
3807 & 30000 \\
 &
\end{array}$$

и т. д.

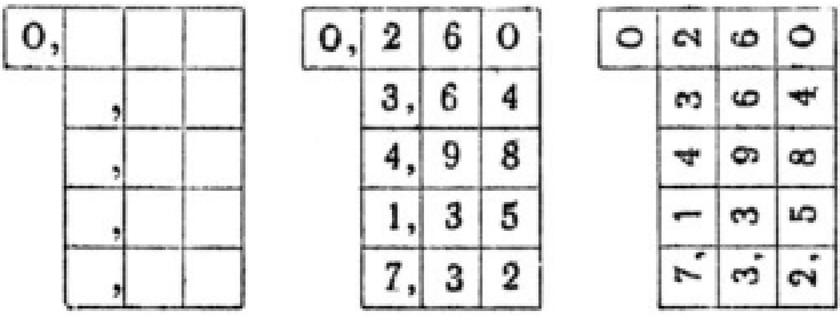
Контроль

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 2{,}6726 \\ 6\,2762 \end{array} \\
\hline
5\,3452 \\
1\,6036 \\
1870 \\
53 \\
16 \\
\hline
7{,}1427
\end{array}$$

и т. д.

Методические замечания

1. Распределение данных производится с помощью цифрового набора. Вынутые карточки с цифрами располагаются в клеточках заранее приготовленного трафарета, имеющего указанный ниже вид (черт. 21 а).



(a) (b) (c)

Чертёж 21

Вынутые пятнадцать карточек укладываются на свободные места, как показано на чертеже (21 b), после чего оказывается возможным прочесть пять данных трёхзначных чисел. Затем нужно представить себе, что все цифры повёрнуты над прямым углом (чертёж 21 с), и тогда, отделяя запятой по одной цифре справа, легко прочесть ещё три пятизначных числа.

Нуль в левом верхнем углу трафарета стоит для того, чтобы обеспечить извлечение корня из правильной дроби, что, с одной стороны, связано с небольшими дополнительными затруднениями при самом вычислении, с другой, — фиксирует ход графика (параболы) по близости её вершины.

2. Графический контроль не исчерпывается слишком приблизительной намёткой графика параболы $y=\sqrt{x}$, производимой каждым учащимся в процессе его индивидуальной работы.

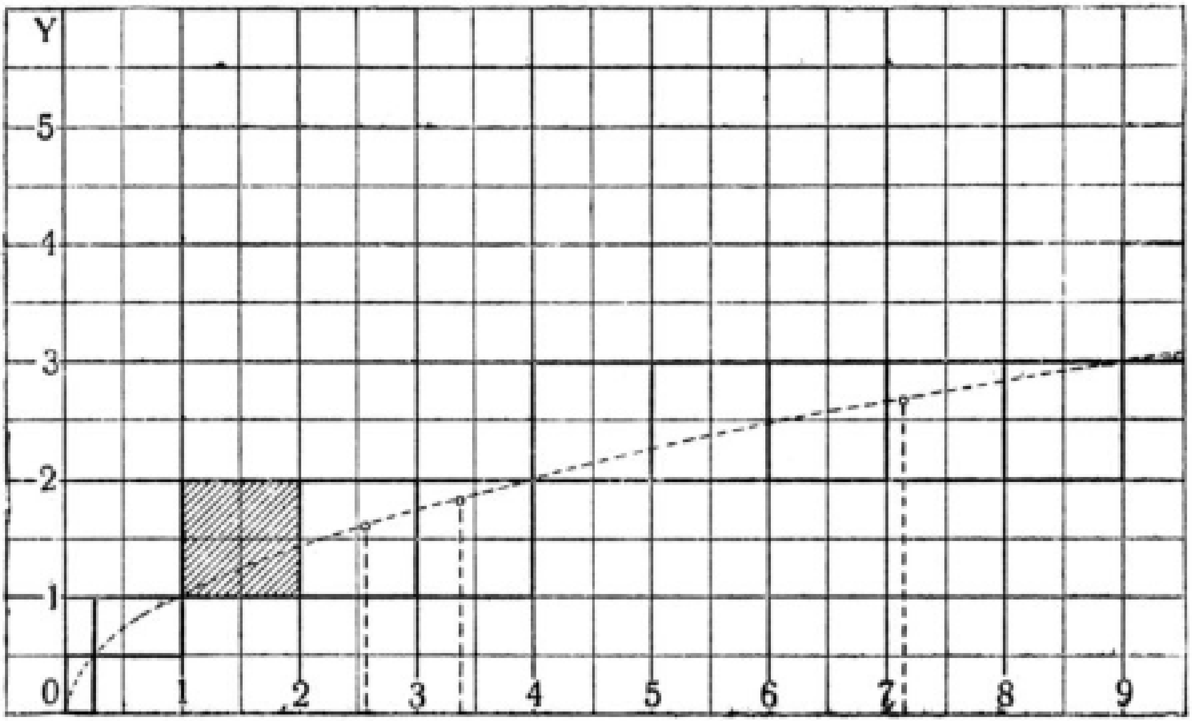


Чертёж 22

Для более тщательной проверки можно пустить в ход особую контрольную тетрадку из 10 страниц клетчатой бумаги; на каждой из таких страниц в увеличенном виде (масштаб: 1 = 20 клеток) помещается только одна из следующих десяти квадратных единиц координатной сетки (см. чертёж 22):

$$\begin{array}{llll}
1)\ \begin{matrix}0<x<1\\ 0<y<1,\end{matrix} & 2)\ \begin{matrix}1<x<2\\ 1<y<2,\end{matrix} & 3)\ \begin{matrix}2<x<3\\ 1<y<2,\end{matrix} & 4)\ \begin{matrix}3<x<4\\ 1<y<2,\end{matrix} \\
5)\ \begin{matrix}4<x<5\\ 2<y<3,\end{matrix} & 6)\ \begin{matrix}5<x<6\\ 2<y<3,\end{matrix} & 7)\ \begin{matrix}6<x<7\\ 2<y<3,\end{matrix} & 8)\ \begin{matrix}7<x<8\\ 2<y<3,\end{matrix} \\
 & 9)\ \begin{matrix}8<x<9\\ 2<y<3,\end{matrix} & 10)\ \begin{matrix}9<x<10\\ 3<y<4.\end{matrix} &
\end{array}$$

Каждый учащийся, закончивший Упражнение 13, своей рукой отмечает на разных листах контрольной тетрадки полученные им результаты. Если в классе всего 30 человек, то на каждую страницу контрольной тетрадки придётся в среднем по

$$\frac{8\times 30}{10}=24$$

точки. На первой странице точек будет почти вдвое больше; чтобы избежать тесноты, можно из первого квадрата выделить два прямоугольника, именно,

$$\begin{cases}0<x<0{,}25\\ 0<y<0{,}5\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}0{,}25<x<1\\ 0{,}5\ <y<1,\end{cases}$$

зато увеличивая масштаб вдвое: $1=40$ клеток.

Так как каждому учащемуся нет возможности поставить свою подпись около каждой поставленной им точки, то ради обеспечения авторства можно условиться в том, что рядом с точкой каждый ставит (очень мелко!) „свой номер", например, номер по списку в классном журнале.

На чертеже 23 изображена вторая страница контрольной тетради с квадратом $\begin{cases}1<x<2\\ 1<y<2\end{cases}$, в котором отмечено 22 попавших в него точки.

3. Представленные материалы, именно: 1) индивидуальные графики на основных листах работ, 2) вычисления на вспомогательных листах, 3) контрольная тетрадь — в своей совокупности обеспечивают преподавателю возможность установить, насколько всем классом и каждым

учащимся в отдельности усвоена техника извлечения квадратных корней, а также выявить имеющиеся погрешности.

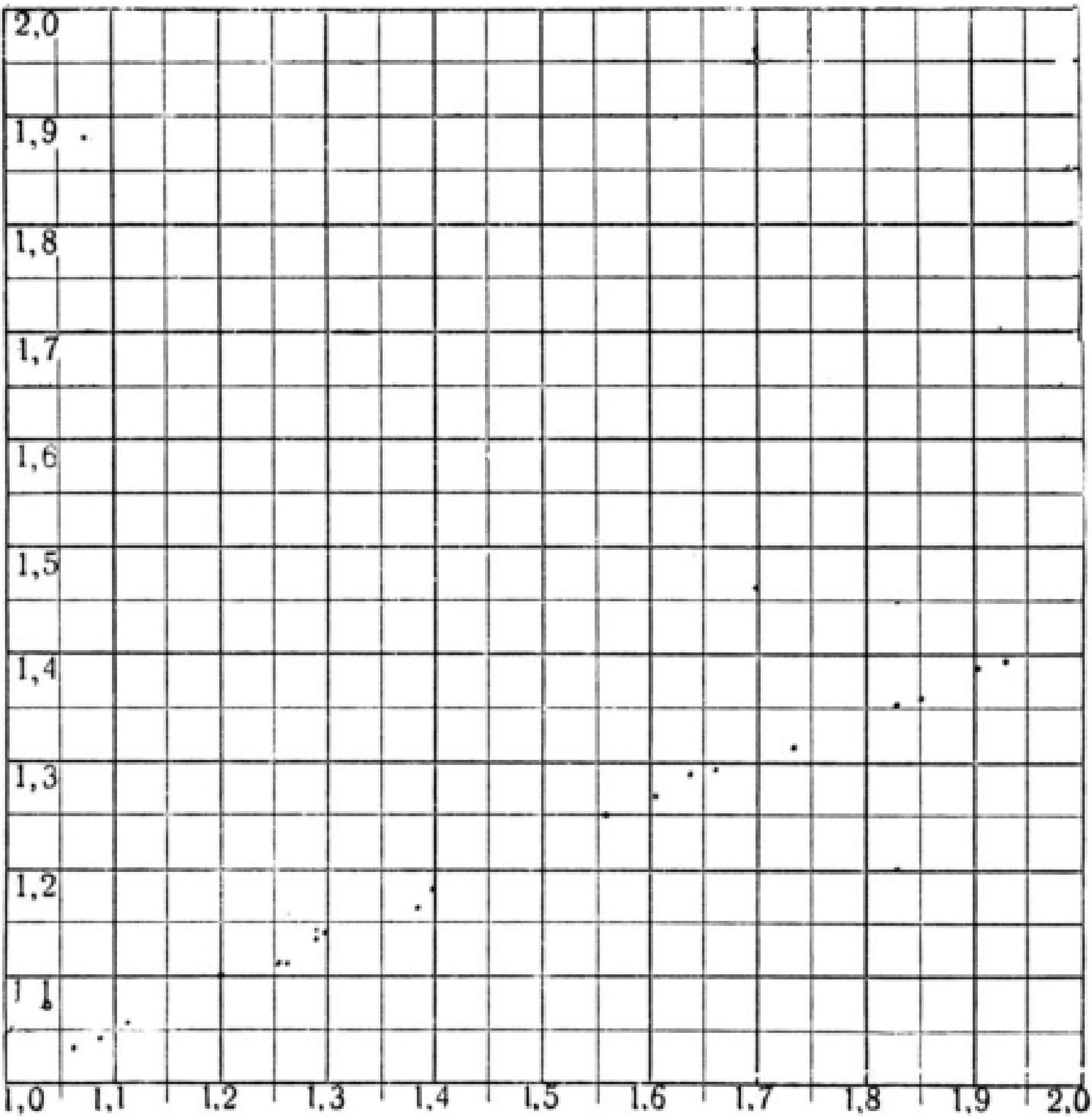


Чертёж 23

14. ДЛИНА ЛОМАНОЙ ЛИНИИ

Упражнение имеет в виду практиковать учащихся в самом непосредственном применении теоремы Пифагора; при этом устанавливается теснейшая связь между радикальными выражениями, их числовыми значениями (в виде десятичных дробей) и соответствующим геометрическим представлением (в виде длин отрезков).

Длину данного отрезка — расстояние между двумя данными точками, его концами, легко установить приближённо, с очень большой, хотя и ограниченной точностью, если воспользоваться циркулем и линейкой с делениями. Но если данный отрезок нарисован на клетчатой бумаге — прямоугольной координатной сетке — причём координаты его концов предполагаются известными (например, выражаются целыми числами), то установить его длину, не прибегая ни к каким чертёжным инструментам, посредством одних только вычислений, можно с любой точностью. Именно, это делается с помощью теоремы Пифагора.

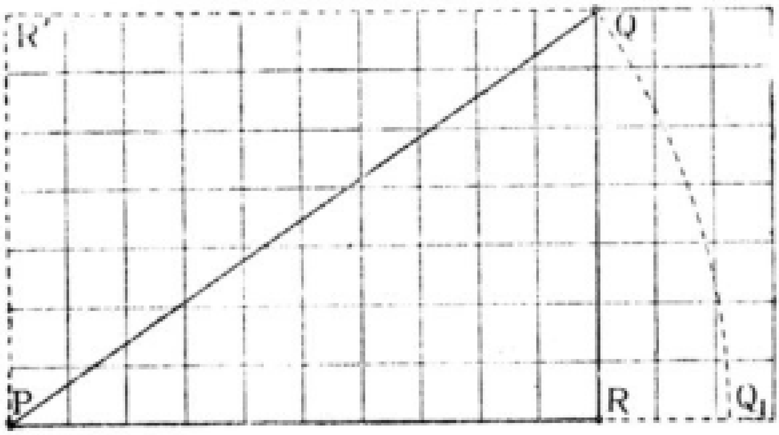


Чертёж 24

Пусть задан отрезок PQ. Если через его концы P и Q проведём пунктиром (или хотя бы мысленно) прямые по линовке — вертикальные и горизонтальные, параллельно координатным осям воображаемой координатной системы (где бы ни находилось её начало!), то получаются два прямоугольных треугольника PQR и PQR', по отношению к которым данный отрезок есть гипотенуза. Рассматривая любой из этих треугольников, например, PQR, мы видим, что в нём, согласно теореме Пифагора, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т. е.

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2.$$

На нашем чертеже $PR=10$, $RQ=7$ (в клеточках-единицах), и потому

$$PQ^2 = 10^2 + 7^2 = 149,$$

откуда следует, что (в тех же единицах)

$$PQ = \sqrt{149}.$$

Квадратный корень, пользуясь обычным систематическим приёмом, можно вычислить с каким угодно числом знаков после запятой; или, иначе, прибегая, скажем, к четырёхзначной таблице, гораздо быстрее найдём, что

$$PQ = 12{,}2066.$$

(Для практических целей такая точность слишком велика, и стоит округлить в тысячных или в сотых).

Если поставим, с целью контроля, одну ножку циркуля в точку P, другую в точку Q и затем перенесём отрезок PQ на горизонтальную прямую PR, то получится отрезок PQ_1, длину которого можно непосредственно сосчитать по клеточкам, конечно, с меньшей точностью: на-глаз видно, что

$$PQ_1 \sim 12{,}2.$$

Упражнение 14

На клетчатой бумаге дано 11 точек, расположенных в вершинах сетки. Они обозначены по порядку большими буквами латинского алфавита

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K.$$

Соединив их последовательно отрезками AB, $BC, \ldots JK$, вычислить, с помощью теоремы Пифагора, длины каждого из этих отрезков с четырьмя знаками после запятой. Затем, суммируя результаты, определить длину всей ломаной линии $ABC \ldots K$; проверить суммирование методом девятки (см. Упражнение 1).

Нарисовать десять параллельных отрезков, имеющих длины, равные соответственно отдельным слагаемым, и проверить с помощью циркуля, что они равны отрезкам AB, $BC, \ldots JK$.

Образец: (см. чертёж 25, a и b, на стр. 116 и 117)

Методические замечания

1. Преподаватель ставит на каждом листе 11 точек своей рукой, вместе с буквами, а отрезки ломаной проводит ученик; или, если преподавателю покажется удобнее, он сам рисует всю ломаную в присутствии ученика (показывая начало, направление и конец), а ученик пишет большие буквы A, B, $C, \ldots K$. Необходимо при распре-

делении данных учитывать, чтобы вся работа (основной лист) поместилась на одной странице.

2. По указанию учителя корни извлекаются систематическим приёмом (если класс ещё не твёрд в таковом) или по таблицам (если приём усвоен).

Вспомогательный лист нужен только в первом случае: на нём располагаются извлечения корней.

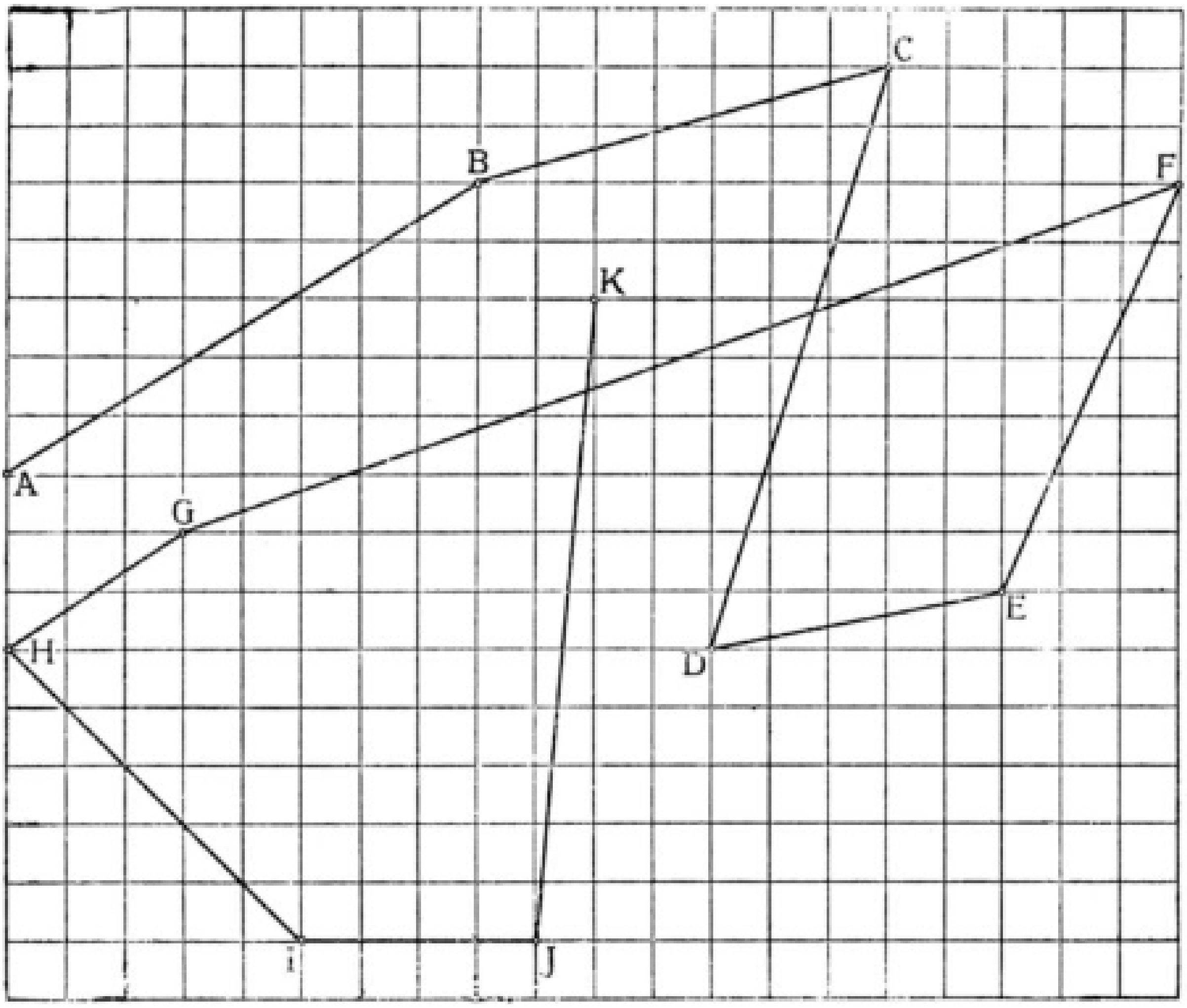


Чертёж 25-а

3. Если каждый корень извлекается с округлением в четвёртом знаке, то погрешность при определении длин каждого отрезка не превышает 0,00005, погрешность при определении длины всей ломаной не превышает (и может достигать) 0,0005; поэтому в окончательном результате можно взять только три знака после запятой, отбрасывая четвёртый.

$AB = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9{,}4340$	2
$BC = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} = 7{,}2801$	0
$CD = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} = 10{,}4403$	3
$DE = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} = 5{,}0990$	5
$EF = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7{,}6158$	0
$FG = \sqrt{17^2 + 6^2} = \sqrt{325} = 18{,}0278$	8
$GH = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6058$	2
$HI = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}0711$	7
$IJ = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4{,}0000$	4
$IJ = \sqrt{1^2 + 11^2} = \sqrt{122} = 11{,}0454$	6
83,619[1]	1

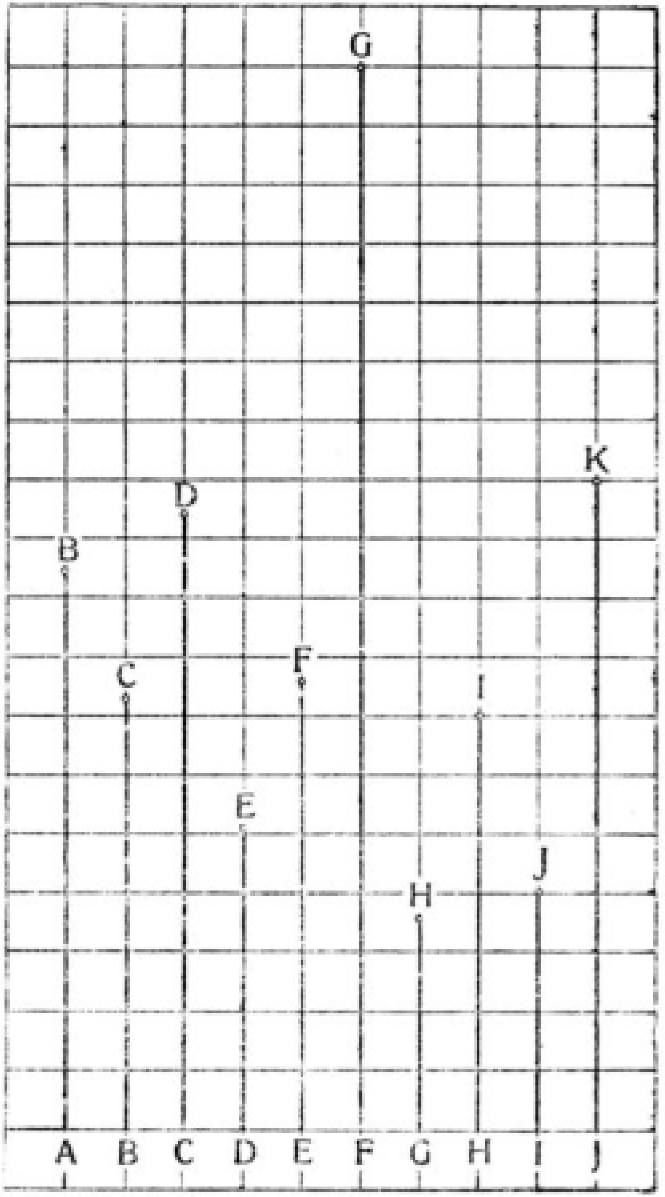


Чертёж **25-в**

4. Весьма существенно, после того как Упражнение 14 закончено, заняться решением задач на построение, с помощью квадратной сетки, радикальных выражений вроде следующих:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{85}$ (двумя способами) и т. д. Можно привлечь к рассмотрению двойную таблицу функции двух переменных $z = x^2 + y^2$ (при целых значениях x и y). Дальше не представит труда, оперируя, если потребуется, циркулем, построить выражения

$$\sqrt{3} = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2},$$
$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2},$$
$$\sqrt{7} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2}\,\text{[1]} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2},$$

а также:

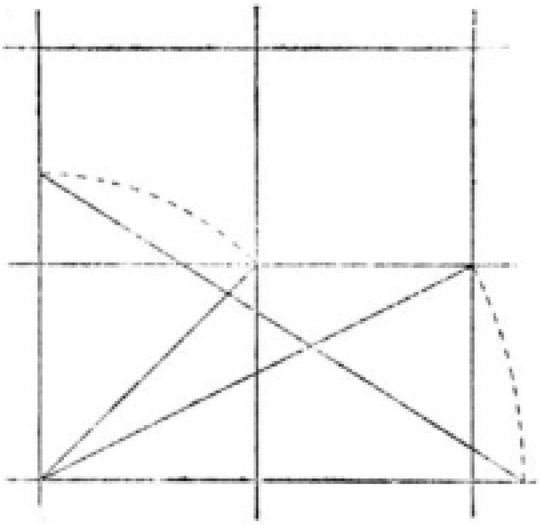
$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

и т. д.

15. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО МНОГОКОЛОННЫМ СХЕМАМ

Упражнение имеет в виду: 1) приучать к рациональному расположению вычислений при составлении таблицы значений функции, заданной более сложной формулой, 2) познакомить пропедевтически с кривыми второго порядка в „канонической“ форме.

При составлении таблиц функций по заданным более или менее сложным формулам мало целесообразно вы-



---

[1] См. следующий чертёж.

полнять каждую подстановку в отдельности. Гораздо лучше выполнять их все сразу, производя подряд одноимённые действия. При этом приходится для записи промежуточных результатов вводить дополнительные столбцы (колонны): полезно заранее тщательно обдумывать их порядок — с таким расчётом, чтобы вычислительное усилие, затрагиваемое при переходе от одного столбца к другому, было не слишком большим, но и не настолько малым, чтобы введение нового столбца себя не оправдало.

Примером может служить составление таблицы значений функции

$$y = \frac{1 + \frac{1}{2}x + x^2}{1 + x^2}$$

(см. Упражнение 7). Схема будет в этом случае иметь следующий вид:

x	$\frac{1}{2}x$	x^2	$1 + \frac{1}{2}x + x^2$	$1 + x^2$	$\frac{1 + \frac{1}{2}x + x^2}{1 + x^2}$
0,5	0,25	0,25	1,50	1,25	1,200
0,6	0,30	0,36	1,66	1,36	1,221
0,7	0,35	0,49	1,84	1,49	1,235
0,8	0,4	0,56	1,96	1,56	1,276

Обдумав план вычисления и записав заглавную строку, таблицу после этого заполняют по столбцам, а не по строчкам. Все действия (кроме последнего деления) легко выполняются в уме.

Если бы нужно было подставлять, скажем, числовые значения $x = 0{,}51$; $0{,}52$; $0{,}53$ и т. д., то, пользуясь той же схемой, пришлось бы на стороне (на вспомогательном листе) делать также и умножения. Но возможно было бы, меняя строки и столбцы, часть действий выполнять в самой таблице, как показано ниже:

x	× 0,51 150 225 5	× 0,52 250 260 10	× 0,53 350 265 16	× 0,54 450 270 22
x^2	0,260	0,270	0,281	0,292
$\frac{1}{2}x$	0,255	0,260	0,265	0,270
$1+\frac{1}{2}x+x^2$	1,515	1,530	1,546	1,562
$1+x^2$	1,260	1,270	1,281	1,292
$\dfrac{1+\frac{1}{2}x+x^2}{1+x^2}$	1,202	1,205	1,207	1,209

При таком расположении, конечно, таблица заполняется по строчкам.

Само собой разумеется, что, если применяются указанного вида многоколонные или многострочные схемы (что соответствует одновременному выполнению всех подстановок), то все сразу под самый конец отмечаются и точки графика.

Упражнение 15

Решить относительно y уравнения:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

(a и b — целые положительные)

и затем, ограничиваясь целыми значениями x, составить таблицы значений y для всех четырёх уравнений.

В порядке графического контроля отмечать точки на чертеже. Повернув лист на 90°, начало координат поместить в середине. Масштаб: 1=1 клеточка. Все графики поместить на одном чертеже.

Вычисления производить только для значений x, дающих точки в пределах чертежа. Расположить их в многоколонных схемах. Корни извлекать по таблицам, округляя в сотых.

Образец ($a = 7,\ b = 4$)

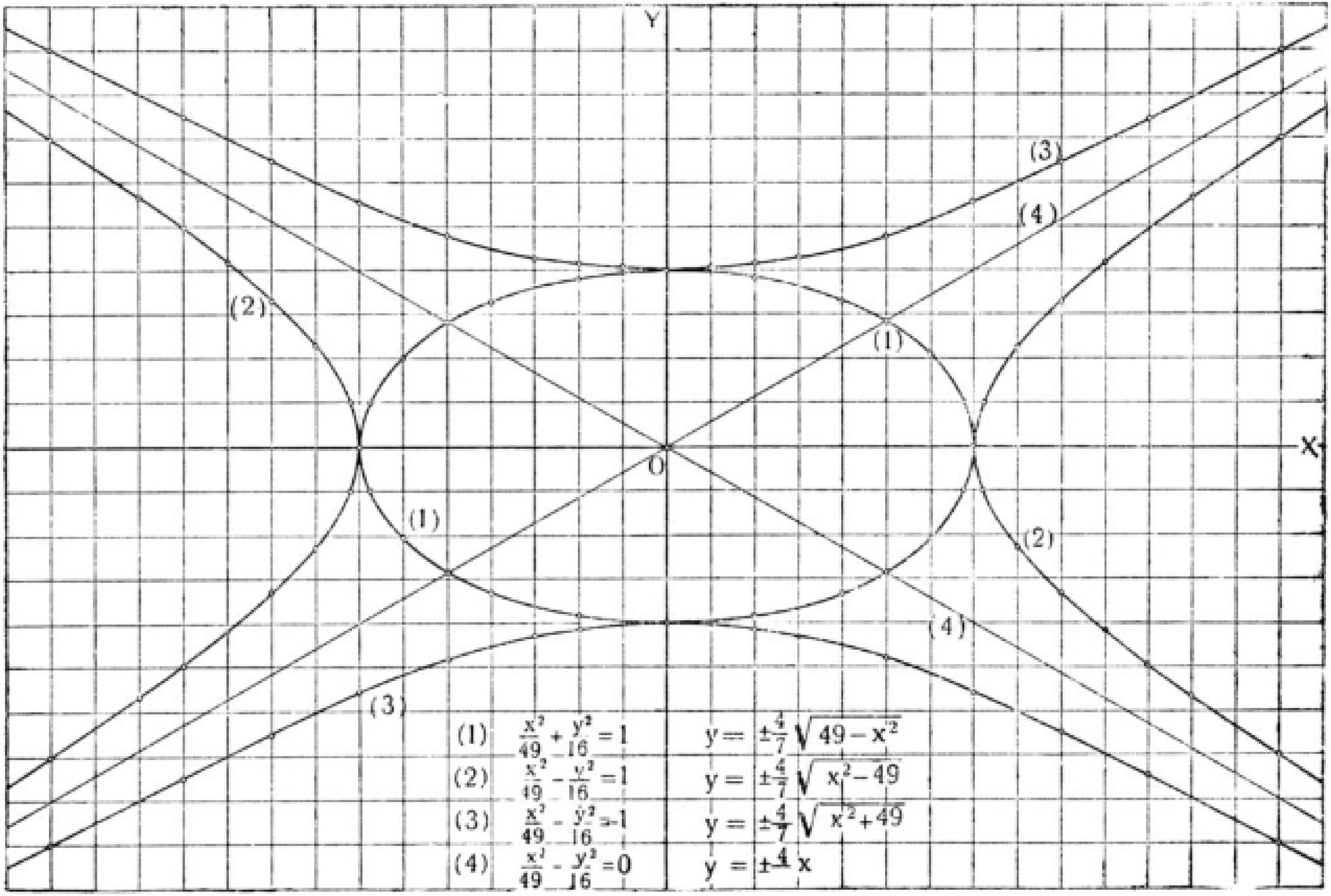

Y
X
O
(1)
(2)
(3)
(4)
(1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ $y=\pm\frac{4}{7}\sqrt{49-x^2}$
(2) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ $y=\pm\frac{4}{7}\sqrt{x^2-49}$
(3) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=-1$ $y=\pm\frac{4}{7}\sqrt{x^2+49}$
(4) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=0$ $y=\pm\frac{4}{7}x$

Чертёж 26

Образец $(a = 7,\ b = 4)$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9	± 10	± 11	± 12
x	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$49 - x^2$	49	48	45	40	33	24	13	0	—	—	—	—	—
$x^2 - 49$	—	—	—	—	—	—	—	0	15	32	51	72	95
$x^2 + 49$	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149	170	193
$\sqrt{49 - x^2}$	7,00	6,93	6,71	6,32	5,74	4,90	3,61	0	—	—	—	—	—
$\sqrt{x^2 - 49}$	—	—	—	—	—	—	—	0	3,87	5,66	7,14	8,49	9,75
$\sqrt{x^2 + 49}$	7,00	7,07	7,28	7,62	8,06	8,60	9,22	9,90	10,63	11,40	12,21	13,04	13,89
$\frac{4}{7}\sqrt{49 - x^2}$	4,00	3,96	3,83	3,61	3,28	2,80	2,06	0	—	—	—	—	—
$\frac{4}{7}\sqrt{x^2 - 49}$	—	—	—	—	—	—	—	0	2,11	3,23	4,08	4,85	5,57
$\frac{4}{7}\sqrt{x^2 + 49}$	4,00	4,04	4,14	4,35	4,61	4,91	5,27	5,67	6,07	6,51	6,98	7,45	7,94
$\frac{4}{7}x$	0,00	0,57	1,14	1,71	2,29	2,86	3,43	4,00	4,57	5,14	5,71	6,29	6,86

Методические замечания

1. При распределении данных значений параметров a и b удобно брать значения:

$$a = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,$$
$$b = 3,\ 4,\ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 9,\ 10.$$

Таким образом получается всего $7 \times 8 = 56$ комбинаций. Из них те четыре, для которых $a = b$, являются несколько облегчёнными в смысле вычислений (отсутствуют числовые множители перед радикалами).

2. Все радикалы извлекаются с двойным знаком, но таблицу этими двойными знаками лучше не загромождать.

3. Нет оснований не сообщить учащимся наименований кривых, являющихся графиками данных уравнений:

(1) — эллипс,

(2) — гипербола,

(3) — также гипербола, „сопряжённая“ с предыдущей,

(4) — пара прямых.

4. С кривыми второго порядка в канонической форме учащиеся будут иметь случай познакомиться ближе: на данном этапе появление их имеет пропедевтическое значение.

5. Полезно обратить внимание учащихся на свойства симметрии получаемых графиков.

6. Проверка Упражнения 15 преподавателем: взгляд на представленный чертёж.

7. Упражнение 16 следует использовать в качестве домашней работы.

16. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Упражнение имеет в виду тренировку в решении простейших систем второго порядка, с привлечением соответствующих геометрических представлений.

Как показывают многочисленные примеры, уравнение, связывающее между собою две буквы (переменных), скажем, x и y, имеет, как правило, бесконечное множество решений: другими словами, существует сколько угодно пар числовых значений x, y, удовлетворяющих этому уравнению.

Так, уравнение $3x - 4y = 0$ имеет решения, содержащиеся в следующей таблице:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	1	...

и ещё бесконечное множество решений, не содержащихся в этой таблице. В самом деле, можно дать x любое значение, и тогда найти значение y, согласно уравнению. Все решения, будучи изображены в виде точек в координатной плоскости, образуют прямую с наклоном $\frac{3}{4}$, проходящую через начало координат: эта прямая есть график уравнения $3x-4y=0$.

Точно так же уравнение $x^2+y^2=25$ имеет бесконечное множество решений: действительно, давая x произвольное значение (по абсолютному значению не превышающее 5), мы по уравнению найдём два значения y. Например, если $x=3$, то $y=\pm 4$; если $x=2$, то $y=\pm\sqrt{21}$ и т. д. Отмечая полученные точки (x, y) в координатной плоскости, мы сразу увидим, что график уравнения $x^2+y^2=25$ будет окружность с центром в начале координат и радиусом 5. К этому же заключению можно придти и путём рассуждения: уравнению можно придать вид $\sqrt{x^2+y^2}=5$, и, так как по теореме Пифагора $\sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние точки (x, y) от начала координат, то смысл последнего равенства заключается в том, что точка (x, y) лежит на расстоянии 5 от начала координат.

Два графика — окружность $x^2+y^2=25$ и прямая $3x-4y=0$ изображены на чертеже 27.

Решим теперь систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x-4y=0 \\ x^2+y^2=25, \end{cases}$$

а затем выясним геометрический смысл этой системы. По способу подстановки из первого уравнения получаем

$$y=\frac{3}{4}x,$$

откуда следует, если подставим значения y во вторые уравнения:

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=25,$$

т. е.

$$x^2 = 16,$$

или

$$x = \pm 4;$$

и тогда

$$y = \pm 3.$$

Знаки x и y должны быть одинаковы: получается всего два решения: $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ и $x_2 = -4$, $y_2 = -3$.

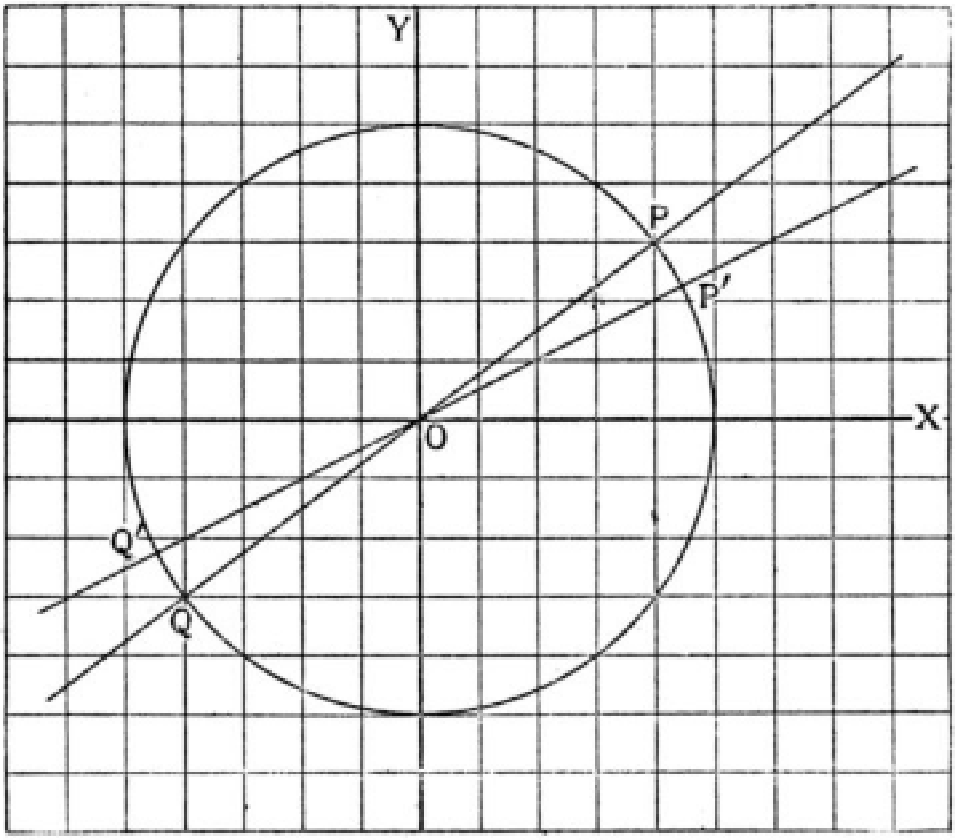


Чертёж 27

Геометрический смысл задачи заключается в нахождении точки, координаты которой (x, y) удовлетворяют одновременно и первому и второму из уравнений данной системы. Но это значит, что точка с координатами (x, y), дающими решение системы, лежит одновременно и на прямой $3x - 4y = 0$ и на окружности $x^2 + y^2 = 25$, т. е. есть одна из двух точек пересечения названных линий. Взгляд на чертёж 27 позволяет проконтролировать правильность решения: в самом деле, точка пересечения P имеет координаты $(4, 3)$, а точка пересечения Q — координаты $(-4, -3)$.

Решая подобным же образом систему

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+y^2=25, \end{cases}$$

мы получим два решения:

$x_1=2\sqrt{5}$, $y_1=\sqrt{5}$ и $x_2=-2\sqrt{5}$, $y_2=-\sqrt{5}$, причём $\sqrt{5}=2{,}23\ldots$, $2\sqrt{5}=\sqrt{20}=4{,}47\ldots$

И, действительно, наметив на чертеже прямую $Q'OP'$ с наклоном $\frac{1}{2}$, видим, что координаты точек P' и Q', взятые из чертежа, вполне отвечают решениям (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если бы мы рассмотрели ещё, наконец, систему

$$\begin{cases} 3x-4y+24=0 \\ x^2+y^2=25, \end{cases}$$

то оказалось бы, что она не имеет (действительных) решений: этому геометрически соответствует тот факт, что у прямой $3x-4y+24=0$, делающей, как легко убедиться, на осях Ox и Oy отрезки -8 и $+6$, нет точек пересечения с окружностью $x^2+y^2=25$.

Рассмотренные примеры достаточно ясно иллюстрируют то общее положение, что решениям системы двух уравнений с двумя неизвестными соответствуют точки пересечения графиков этих уравнений.

Указанное обстоятельство легко используется при контроле решения системы, так как даёт возможность судить и о числе решений и о числовых значениях определяемых неизвестных.

В предстоящем *Упражнении* 16, как составная часть, войдёт задача: написать уравнение прямой, проходящей через две точки, с заданными координатами.

Рассмотрим на примере, как решить такую задачу, ограничиваясь предположением, что данные точки имеют различные абсциссы.

Пусть даны точки $A(3,5)$ и $B(7,4)$. Посмотрим, нельзя ли подобрать коэффициенты m и n в уравнении прямой

$$y=mx+n$$

таким образом, чтобы эта прямая проходила через точки

A и B. Это означает, что координаты точек A и B должны удовлетворять уравнению прямой. Итак, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} 5 = 3m + n \\ 4 = 7m + n. \end{cases}$$

Нужно подобрать значения m и n так, чтобы оба равенства удовлетворялись, т. е. нужно решить написанную выше систему относительно m и n. Решение получается следующее: $m = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{23}{4}$. Подставляя в уравнение $y = mx + n$, получим уравнение искомой прямой:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}.$$

Оставлять его в таком виде не следует: лучше избавиться от дробей, умножая обе части на 4, и перенести члены, содержащие переменные, в левую часть. Тогда получим:

$$x + 4y = 23.$$

Можно порекомендовать сделать проверку:

$$\begin{cases} 3 + 4 \cdot 5 = 23 \\ 7 + 4 \cdot 4 = 23. \end{cases}$$

Упражнение 16

Дано уравнение второй степени, связывающее между собою буквы (переменные) x и y. Кроме того, даны на координатной плоскости четыре точки S, A, B и C.

Требуется:

1) построить график данного уравнения,

2) написать уравнение прямых SA, SB и SC,

3) решить совместно данное уравнение с каждым из полученных уравнений,

4) провести графический контроль, рассматривая точки пересечения каждой из прямых SA, SB и SC с графиком данного уравнения.

Образец

Основной лист

График (см. чертёж 28 на стр. 129)

Данное уравнение:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Координаты данных точек:

	S	A	B	C
x	5	−1	11	6
y	3	6	−9	8

Уравнения прямых:

$$\begin{array}{ll} (SA) & x + 2y - 11 = 0 \\ (SB) & 2x + y - 13 = 0 \\ (SC) & 5x - y - 22 = 0 \end{array}$$

Вспомогательный лист

Системы уравнений	Их решения		
	в радикалах	в десятичных дробях	
$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x+2y=11 \end{cases}$	$x=\frac{11 \pm \sqrt{1516}}{5}$ $y=\frac{11-x}{2}$	$x_1=\frac{11-38{,}9}{5}=-5{,}6;$ $y_1= \quad 8{,}3;$	$x_2=\frac{11+38{,}9}{5}=10{,}0$ $y_2= \quad 0{,}5$
$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 2x+y=13 \end{cases}$	$x=\frac{26 \pm \sqrt{331}}{5}$ $y=13-2x$	$x_1=\frac{26-18{,}2}{5}=1{,}6;$ $y_1= \quad 9{,}8;$	$x_2=\frac{26+18{,}2}{5}=8{,}8$ $y_2= \quad -4{,}6$
$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 5x-y=22 \end{cases}$	$x=\frac{55 \pm \sqrt{529}}{13}$ $y=5x-22$	$x_1=\frac{55-23}{13}=2{,}46;$ $y_1= \quad -9{,}70;$	$x_2=\frac{55+23}{13}=6$ $y_2= \quad =8$

Методические замечания

1. Стоит предлагать уравнение второй степени из числа самых простых, график которых известен учащимся; построение по точкам этого графика в случае надобности следует произвести на доске прежде, чем сообщать текст Упражнения 16.

В качестве таких уравнений, кроме уравнения окружности $x^2 + y^2 = 100$, могут быть рекомендованы в особенности следующие уравнения парабол

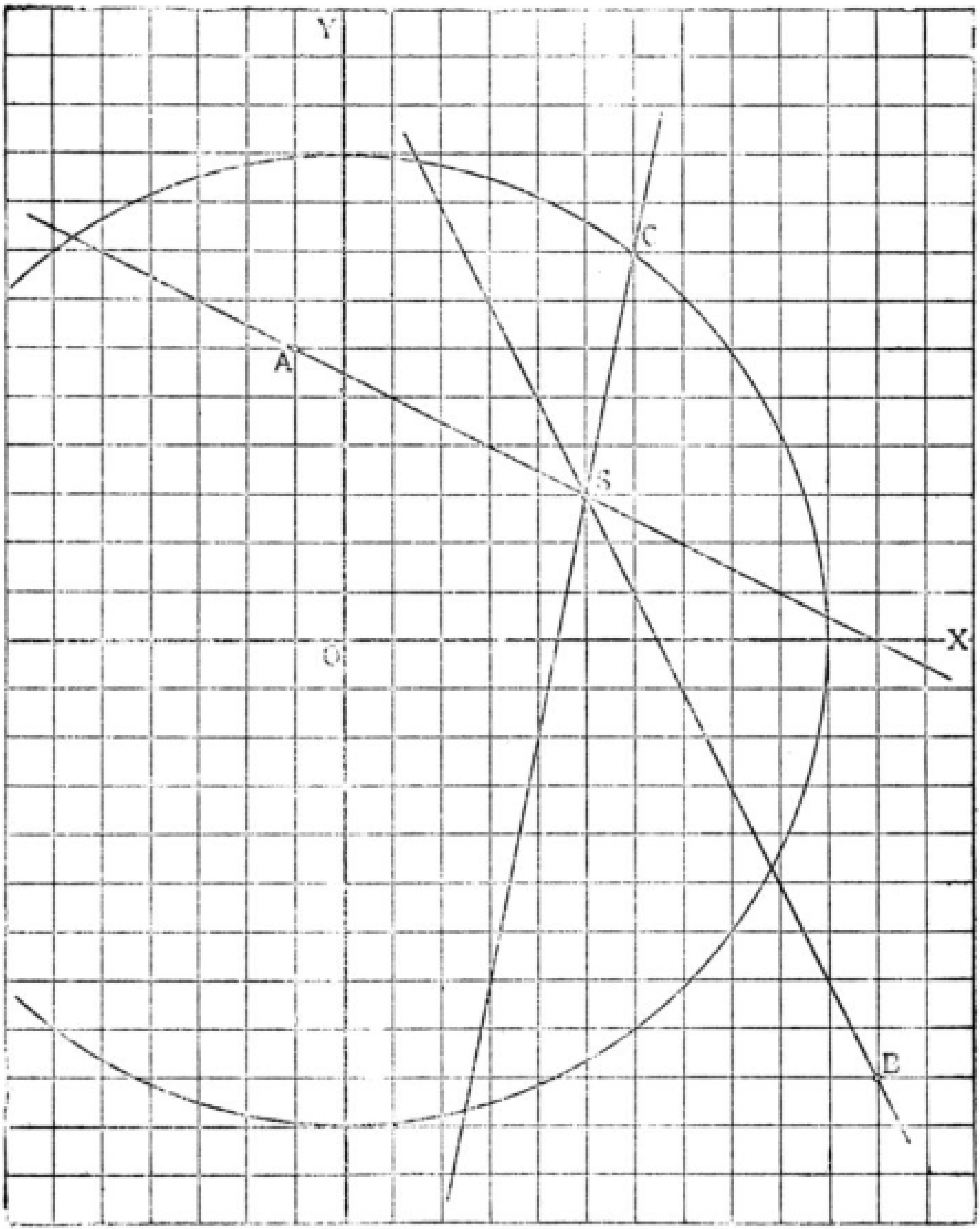


Чертёж 28

$$x^2 - y = 0 \text{ и } x - y^2 = 0$$

или гиперболы $xy = C$ (C, напр., $= 36$).

Вполне целесообразно, ради внесения некоторого разнообразия, предложить половине класса уравнение окружности, а другой половине — уравнения параболы или гиперболы, пуская, таким образом, в ход все три варианта.

2. Расставить точки S, A, B, C преподаватель может своей собственной рукой после того, как график уравнения второй степени уже предварительно изготовлен (в классе или дома). Чтобы обеспечить существование действительных решений, достаточно взять точку S внутри кривой (со стороны вогнутости); после этого точки A, B, C можно брать внутри или вне или на самой кривой — безразлично. Чтобы не вовлекать учащихся в слишком громоздкие вычисления, следует, выбирая точки в вершинах сетки, заботиться, чтобы угловые коэффициенты (наклоны) прямых SA, SB и SC выражались по возможности простыми дробями.

3. Следует рекомендовать учащимся на вспомогательном листе помещать в определённом порядке все необходимые промежуточные вычисления: решение линейных систем, связанное с проведением прямых через данные точки; решение квадратных уравнений, получающихся в результате применения подстановки и пр. Следует также рекомендовать попутно пользоваться всевозможными уже известными контролями: например, проверять отрезки на осях у прямых SA, SB и SC. Если графический контроль не сходится, искать арифметическую ошибку, прибегая при этом, смотря по обстоятельствам, к методу девятки, к таблицам, к проверке обратными действиями и т. п.

4. Нужна известная осторожность в том, чтобы определять координаты точек пересечения x_1, y_1, x_2, y_2 с должной точностью. Так, в результате решения квадратного уравнения выражение для x получается в виде

$$x = \frac{m + \sqrt{n}}{p};$$

корень из n следует извлекать с тем или иным числом знаков, смотря по величине p.

17. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ

Упражнение имеет в виду: 1) практику в сокращённом умножении, 2) пропедевтическое ознакомление с показательной функцией (n — независимое переменное в формуле $y = x^n$) и со степенными функциями (x — независимое переменное в той же формуле).

При возведении данного числа — целого или же десятичной дроби — в более или менее высокую степень число его цифр очень быстро растет. Так, например, число 9^8, записанное в обычной форме, содержит восемь цифр, число 8^9 — девять цифр; число 5^{20} четырнадцать цифр. Возводя в пятую (всего лишь) степень число 7,9, мы получаем пять знаков перед запятой и пять — после запятой.

При вычислениях последовательных степеней десятичной дроби применение сокращённого умножения (см. Упражнение 4) оказывается особенно ценным, так как избавляет от работы по большей части практически бесполезной, и потому совершенно излишней.

Например, если требуется вычислить значения x^n при $x = 0{,}6$ и $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$, то, округляя с тремя знаками после запятой (в тысячных), мы записали бы все вычисления следующим образом:

$$\begin{array}{r} x = 0{,}600 \\ 60 \\ \hline x^2 = 0{,}360 \\ 60 \\ \hline x^3 = 0{,}216 \\ 60 \\ \hline x^4 = 0{,}130 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^4 = 0{,}130 \\ 60 \\ \hline x^5 = 0{,}078 \\ 60 \\ \hline x^6 = 0{,}047 \\ 60 \\ \hline x^7 = 0{,}028 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^7 = 0{,}028 \\ 60 \\ \hline x^8 = 0{,}017 \\ 60 \\ \hline x^9 = 0{,}010 \\ 60 \\ \hline x^{10} = 0{,}006 \end{array}$$

При $x = 0{,}95$ можно порекомендовать немного более подробную запись:

$$\begin{array}{r} x = 0{,}950 \\ 590 \\ \hline 855 \\ 47 \\ \hline x^2 = 0{,}902 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 = 0{,}902 \\ 590 \\ \hline 812 \\ 45 \\ \hline x^3 = 0{,}857 \end{array}$$

и т. д.

Однако нужно заметить, что в случае, если число, возводимое в степень, значительно превышает единицу, а сама степень — довольно высока, округления нужно производить с большой осторожностью. Так, производя округление

$$2{,}31 \sim 2{,}3$$

и делая при этом ошибку всего лишь в одну сотую, мы рискуем сделать гораздо большую ошибку, написав соотношение

$$2{,}31^5 \sim 2{,}3^5.$$

В самом деле, произведя точное вычисление и затем округляя в сотнях, мы получаем:

$$2{,}31^5 \sim 65{,}77,$$

тогда как

$$2{,}30^5 \sim 64{,}36.$$

Таким образом, сделанная ошибка превышает единицу.

Кроме того, положение осложняется ещё и тем, что в процессе возведения в степень по указанной выше схеме округления совершаются неоднократно.

Отсюда следует сделать тот практический вывод, что, пользуясь этой, чрезвычайно удобной, схемой, необходимо вести вычисление с бо́льшим числом знаков, чем требуется их иметь в конечном результате.

Упражнение 17

Пользуясь сокращённым умножением и ведя действие в трёх знаках после запятой, вычислить значения

$$y = x^n$$

при $x = \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

Результаты, в целях наглядности и контроля, изобразить графически, откладывая значения n вправо, а значения y вверх — в виде столбиков.

Произвести коллективный контроль (см. „Методические замечания“).

Образец ($x = 0{,}94$)

График: см. чертёж 29 на стр. 134.

$$\begin{array}{r}
x = 0{,}940\\
490\\
\hline
846\\
38\\
\hline
x^2 = 0{,}884\\
490\\
\hline
796\\
35\\
\hline
x^3 = 0{,}831\\
490\\
\hline
748\\
33\\
\hline
x^4 = 0{,}781\\
490\\
\hline
703\\
31\\
\hline
x^5 = 0{,}734
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^5 = 0{,}734\\
490\\
\hline
661\\
29\\
\hline
x^6 = 0{,}690\\
490\\
\hline
621\\
28\\
\hline
x^7 = 0{,}649\\
490\\
\hline
584\\
26\\
\hline
x^8 = 0{,}610\\
490\\
\hline
549\\
24\\
\hline
x^9 = 0{,}573\\
490\\
\hline
516\\
23\\
\hline
x^{10} = 0{,}539
\end{array}$$

Методические замечания

1. Необходимо объяснить учащимся, почему значения y при различных значениях n откладываются в виде столбиков, вершины которых нет оснований соединять плавной кривой: показатель n — целое число, и сама формула $y = x^n$ при дробных значениях n лишена смысла. Впрочем, не исключено, что класс, или отдельные учащиеся, уже знают кое-что о дробных показателях: в этом случае целесообразно провести дополнительные вычисления, например, при $n = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, и тогда поставить дополнительные столбики. Эти операции со столбиками следует рассматривать как пропедевтику понятия показательной функции.

2. Перед учащимися можно в самом же начале поста-

вить задачу составления двойной таблицы для формулы

$$y = x^n$$

при различных значениях x и при целых значениях n от 1 до 10. Эту работу удобно провести коллективно, предоставляя каждому заполнить одну вертикаль таблицы, соответствующую одному значению x и различным значениям n.

Итог всего Упражнения 17, и вместе с тем графический контроль заключается в составлении графиков десяти степенных функций

$$y = x^n \ (n = 1, 2, \ldots, 10)$$

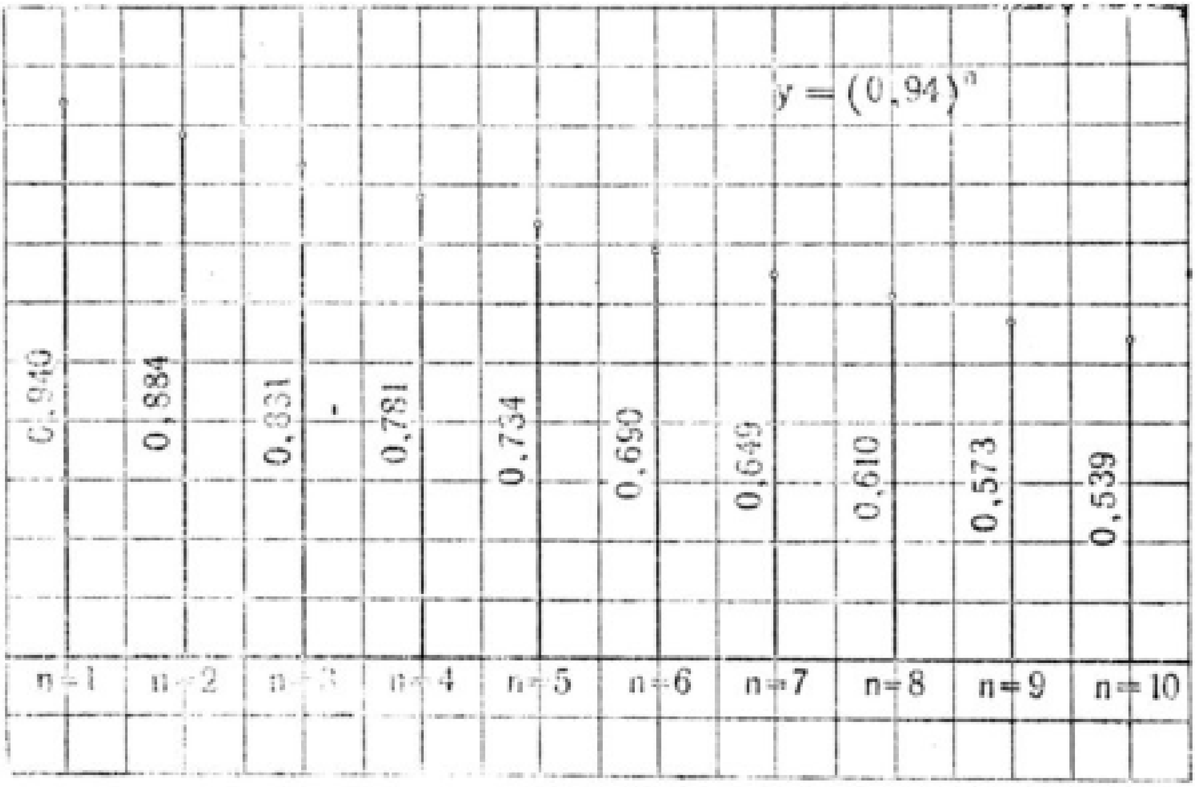


Чертёж 29

на одном и том же чертеже. Итоговый чертёж можно было бы изготовить на классной доске на протяжении одного урока, но в целях сбережения учебного времени и достижения большей точности построений гораздо лучше поступить иначе.

Пусть, во-первых, будет заранее изготовлен большой лист чертёжной бумаги для двойной таблицы значений $y = x^n$, надлежащим образом разграфлённый, на котором при всяком значении x будет поставлена фамилия ученика, который получил это значение. Каждому учащемуся предлагается заполнить соответствующую вертикаль теми самыми (округлёнными в сотых!) числами, которые получены им в его индивидуальной работе. Образцом может служить следующая табличка, в которой однако всего лишь семь полных вертикалей (см. стр. 136).

Здесь оставлены пустые места в тех клеточках, в которых должны стоять числа, меньшие чем 0,005 или большие чем 1,5.

Пусть, во-вторых, будет приготовлен такой же или, может быть, ещё больших размеров лист миллиметровой бумаги[1] или чертёжной бумаги с координатной сеткой для самих графиков. Его можно прикрепить кнопками к доске или повесить на стене, предоставляя каждому учащемуся найти собственную абсциссу (лучше опять-таки, если там уже будет стоять его фамилия) и отметить по вертикали свои „столбики". Неплохо пустить в ход десять цветных карандашей соответственно разным степеням, с тем, чтобы затем каждым цветом мог быть проведён особый график — в виде плавной кривой.

Заполнять таблицу и отмечать точки графиков нужно в классе: во время перерывов между занятиями или после уроков.

После того как работа выйдет из экспериментальной стадии, ошибки будут замечены и исправлены, найдётся, наверное, в классе такой художник, который выразит согласие сделать на большом листе миллиметровой бумаги чертёж, подобный приводимому ниже (черт. 30).

3. Остаётся рассмотреть вопрос о том, какие предлагать значения x. Это зависит от числа учащихся в классе. Если, например, в классе 40 человек, то можно раздать значения, скажем, от 0,50 до 1,20 через интервалы 0,02 (34 значения, с пропуском 1,00), а между остальными распределить менее „трудоёмкие" значения, меньшие чем 0,5.

Масштаб итогового чертежа следует также заранее тщательно рассчитать в соответствии с числом выданных значений x. Это — дело учителя.

---

[1] Заметим, кстати, что миллиметровой бумагой в классной обстановке стоит пользоваться лишь в редких случаях, тогда как клетчатая всегда должна быть под рукой.

x / n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,05	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
1	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,05	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
2	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,56	0,64	0,72	0,81	0,90	1,10	1,21	1,44	—	—	—
3	—	0,01	0,03	0,06	0,12	0,22	0,34	0,42	0,51	0,61	0,73	0,86	1,16	1,33	—	—	—	—
4	—	—	0,01	0,03	0,06	0,13	0,24	0,32	0,41	0,52	0,66	0,81	1,22	1,46	—	—	—	—
5	—	—	—	0,01	0,03	0,08	0,17	0,24	0,33	0,44	0,59	0,77	1,28	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	0,02	0,05	0,12	0,18	0,26	0,39	0,53	0,74	1,34	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	0,01	0,03	0,08	0,13	0,21	0,32	0,48	0,70	1,41	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	0,02	0,06	0,10	0,17	0,27	0,43	0,66	1,48	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	0,01	0,04	0,08	0,13	0,23	0,39	0,63	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	0,01	0,03	0,06	0,11	0,20	0,35	0,60	—	—	—	—	—	—

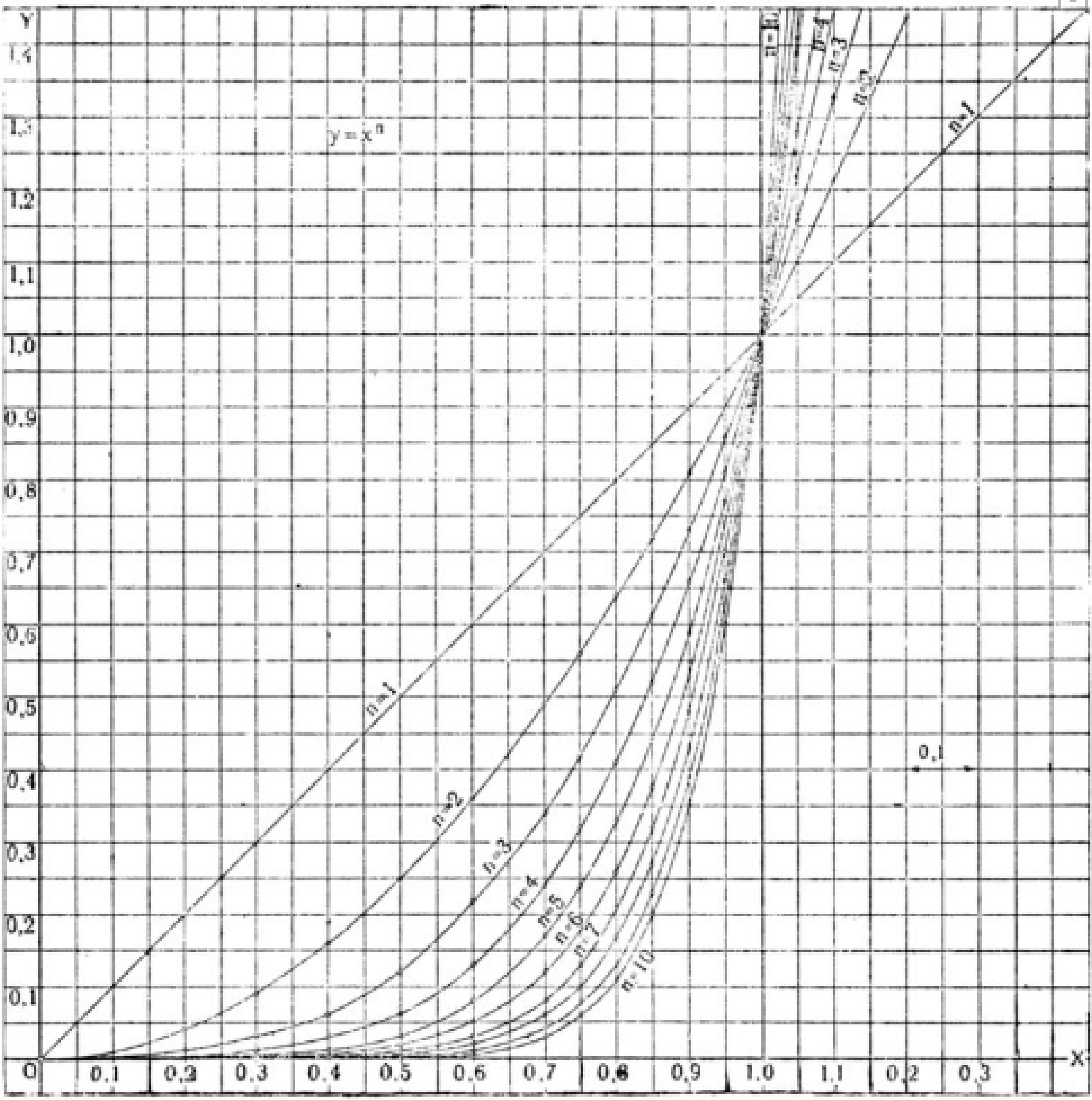


Чертёж 30

18. МНОГОЧЛЕНЫ

Упражнение имеет в виду: 1) применение многоколонных схем к построению графика многочлена, 2) геометрическое представление решения уравнения третьей степени. Это упражнение, между прочим, развивает внимательность при действиях с отрицательными числами.

Пусть требуется вычислить значение многочлена

$$y = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 30$$

при $x = 3$. Это можно сделать путём непосредственной подстановки:

$$2\cdot 3^3+5\cdot 3^2+7\cdot 3+30=2\cdot 27+5\cdot 9+7\cdot 3+30=$$
$$=54+45+21+30=150.$$

Но, пожалуй, внимание утомляется меньше, если перед подстановкой ввести скобки, как показано ниже:

$$y=((2x+5)x+7)x+30.$$

Тогда при подстановке придётся делать по очереди умножения и сложения, не удерживая в памяти отдельных результатов:

$$((2\cdot 3+5)\cdot 3+7)\cdot 3+30=150.$$

Упражнение 18

Согласно двум указанным далее различным схемам, вычислить числовые значения многочлена

$$y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

при всех целых значениях x между -10 и $+10$; построить таблицу и график. Найти корни многочлена.

Схема 1

		. . .	-2	-1	0	1	2	3	. . .
	D								
x									
	Cx								
x^2									
	Bx^2								
x^3									
	Ax^3								
	y								

(Заполнять по строчкам, суммировать по столбцам).

Схема 2

x	Ax	$Ax+B$	$(Ax+B)x$	$(Ax+B)x+C$	$((Ax+B)x+C)x$	y

(Заполнять по строчкам).

Образец $y = x^3 - 4x^2 - 59x + 126$

График: см. чертёж 31, стр. 140

Схема 1

126	. . .	126	126	126	126
x $-59x$	. . .	1 -59	2 -118	3 -177	4 -236
x^2 $-4x^2$	. . .	1 -4	4 -16	9 -36	16 -64
x^3	. . .	1	8	27	64
y	. . .	64	0 (корень)	-60	-110

Схема 2

x	$x-4$	$(x-4)x$	$(x-4)x-59$	$((x-4)x-59)x$	$((x-4)x-59)x+126=y$
..	. .	. . .	. . .	. . .	. . . .
1	-3	-3	-62	-62	64
2	-2	-4	-63	-126	0 (корень)
3	-1	-3	-62	-186	-60
4	0	0	-59	-236	-110
5	1	5	-54	-270	-144
..	. .	. . .	. . .	. . .	. . . .

Методические замечания

1. Результаты вычислений по схеме 1, по схеме 2 и, наконец, график — взаимно контролируются.

2. Масштабы на чертеже 31 отмечены: они — различные по двум осям. Это удобнее, чем если бы при одинаковых масштабах мы взяли бы

$$y = \frac{1}{100}(x^3 - 4x^2 - 59x + 126).$$

3. Составлен приведённый выше пример многочлена чрезвычайно просто: заранее подобраны точки, где

многочлен обращается в нуль, именно, —7, 2 и 9. Посредством перемножения двучленов, получаем:

$$(x+7)(x-2)(x-9)=x^3-4x^2-59x+126.$$

Вообще

$$(x-a)(x-b)(x-c)=$$
$$=x^3-(a+b+c)x+(bc+ca+ab)x-abc.$$

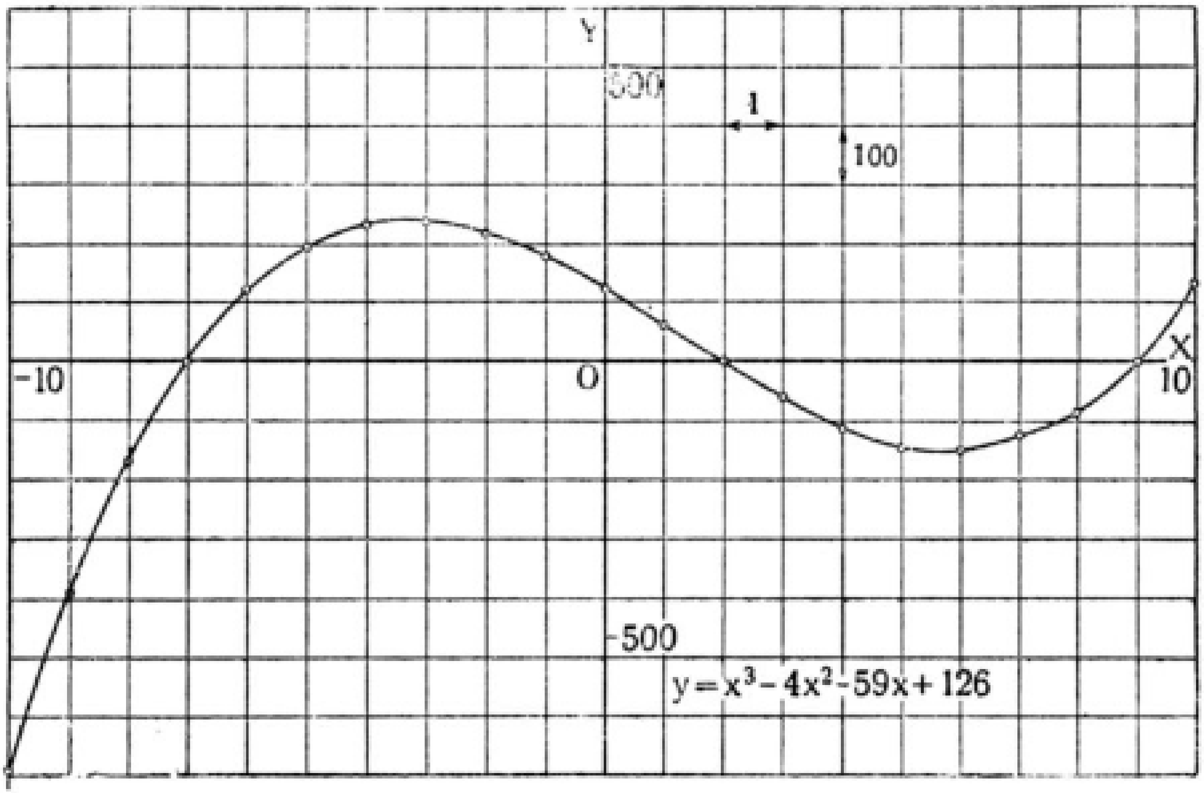


Чертёж 31

В следующей таблице приведены 20 многочленов с указанием их корней.

Число этих многочленов можно в случае надобности легко удвоить, меняя знаки корней, что влечёт за собой изменение знаков коэффициента при x^2 и свободного члена.

Раздавать многочлены лучше всего написанными на карточках.

В связи с этой работой учащимся также полезно поупражняться в составлении многочлена третьей степени по заданным корням.

Материал этой работы использован также в Упражнении 22.

Корни a, b, c	Многочлен
1, 3, -6	$x^3+2x^2-21x+18$
1, 3, -8	$x^3+4x^2-29x+24$
1, 5, -2	$x^3-4x^2-7x+10$
1, 5, -4	$x^3-2x^2-19x+20$
1, 5, -8	$x^3+2x^2-43x+40$
1, 7, -2	$x^3-6x^2-9x+14$
1, 7, -4	$x^3-4x^2-25x+28$
1, 7, -6	$x^3-2x^2-41x+42$
3, 5, -2	x^3-6x^2-x+30
3, 5, -4	$x^3-4x^2-17x+60$
3, 5, -6	$x^3-2x^2-33x+90$
3, 7, -2	x^3-8x^2+x+42
3, 7, -4	$x^3-6x^2-19x+84$
3, 7, -6	$x^3-4x^2-39x+126$
3, 9, -2	$x^3-10x^2+3x+154$
3, 9, -4	$x^3-8x^2-21x+108$
3, 9, -6	$x^3-6x^2-45x+162$
5, 7, -2	$x^3-10x^2+11x+70$
5, 7, -4	$x^3-8x^2-13x+140$
5, 7, -6	$x^3-6x^2-37x+210$

19. ВПИСАННЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Упражнение имеет в виду: 1) применение графического представления функциональной зависимости в задачах геометрического содержания, 2) пропедевтику понятия максимума функции и примитивный метод его приближенного определения.

Станем с каждой точкой $M(x, y)$ первого квадранта координатной плоскости Oxy связывать прямоугольник (Q), образованный перпендикулярами, опущенными из точки M на оси Ox и Oy и самими этими осями. Площадь прямоугольника (Q) будем обозначать через S. Очевидно,

$$S=xy.$$

Предположим дальше, что в рассматриваемом квадранте задана некоторая кривая (Γ), и мы зададимся вопросом: как изменяется площадь S прямоугольника (Q), когда точка M перемещается по кривой (Γ) (черт. 32)?

Займёмся простейшими частными случаями.

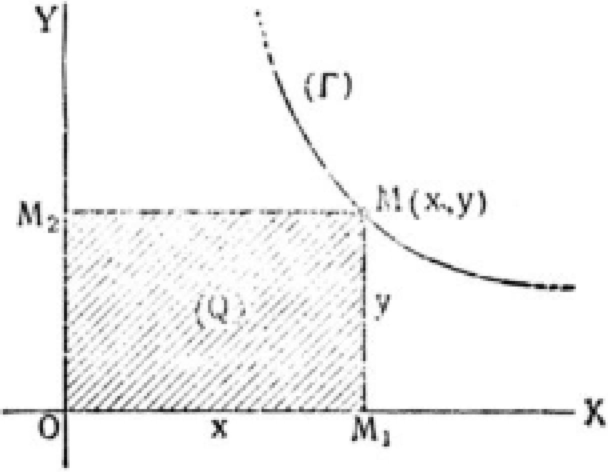


Чертёж 32

1. Пусть кривая (Γ) есть „график обратной пропорциональности“ — гипербола

$$y = \frac{1}{x}$$

(черт. 33 a).

Тогда при перемещении точки M по кривой, скажем, слева направо, её ордината — высота прямоугольника (Q) — всякий раз уменьшается (в силу обратной пропорциональности) во столько раз, во сколько увеличивается её абсцисса — основание прямоугольника; следовательно, площадь не изменяется вовсе. С помощью формулы (или как говорят, аналитически) это обнаруживается таким образом: каково бы ни было число x, мы имеем

$$S = xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

2. Пусть кривая (Γ) есть горизонтальная прямая (чертёж 33 b)

$$y = h;$$

тогда при увеличении абсциссы — основания прямоугольника (Q) — ордината (высота) (Q) остаётся постоянно равной h, и значит, площадь S увеличивается пропорционально основанию с коэффициентом пропорциональности h. По формуле:

$$S = x \,.\, h = hx.$$

3. Пусть кривая (Γ) есть наклонная прямая, отсекающая на осях Ox и Oy отрезки 1:

$$x + y = 1,$$

или

$$y = 1 - x.$$

Нетрудно понять, глядя на чертёж 33 c, что при значении $x=0$, т. е. в том случае, когда точка M находится на оси Oy, интересующая нас площадь S обращается в нуль; дальше, при увеличении x она сначала увеличивается, затем уменьшается, и при $x=1$ (когда M попадает на ось Ox) снова обращается в нуль. С помощью формулы — мы получаем:

$$S=xy=x(1-x).$$

Площадь S является функцией переменной величины x, и картина изменения S в зависимости от значения x даётся таблицей

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
S	0,00	0,09	0,16	0,21	0,24	0,25	0,24	0,21	0,16	0,09	0,00

Позволительно догадываться, что самое большое значение 0,25 площадь S принимает как раз при значении x, равном 0,5, т. е. в тот момент, когда точка M попадает на биссектрису угла Oxy[1].

4. Пусть, наконец, кривая (Γ) есть четверть окружности

$$x^2+y^2=1, \text{ или } y=\sqrt{1-x^2}$$

(черт. 33 d). Тогда характер изменения площади S — такой же, как в предыдущем примере, но числовая картина — иная; формула для площади S теперь принимает вид

$$S=xy=x\sqrt{1-x^2},$$

и мы получаем, при подстановках, табличку

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
S	0,00	0,10	0,20	0,28	0,37	$\frac{\sqrt{3}}{4}=0,44$	0,48	0,50	0,48	0,40	0,00

---

[1] Это можно доказать строго-математически, принимая во внимание, что

$$S=x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2,$$

причём равенство возможно только в том случае, если $x=\frac{1}{2}$.

Табличка ясно показывает, что с увеличением x площадь S сначала возрастает, потом убывает. Наибольшее значение, приблизительно равное 0,50, достигается при x, приблизительно равном 0,7. Чтобы точнее разобраться в этом вопросе, проведём вычисления с шестью знаками, прибегая к таблицам[1]; мы получаем дополнительную табличку

x	0,70	0,71	0,72
S	0,499900	0,499983	0,499142

из которой видно, что наибольшее значение S, чрезвычайно близкое к $\frac{1}{2}$, достигается при x, близком к 0,71. Если посмотрим на чертёж, то он подскажет, что наибольшее значение площади S получается как раз при таком положении точки M, когда она делит ровно пополам рассматриваемую четверть дуги круга. При этом положении точки M мы имеем:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}707107$$

и

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}=\frac{1}{2}$$ [*].

---

[1] См., например, „Таблицы Барлоу квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубичных и обратных величин целых чисел от 1 до 1000", ОНТИ, 1936.

[*] Убедиться в том, что значение S, равное $\frac{1}{2}$, есть в точности наибольшее, можно с помощью следующего рассуждения. Величина S принимает наибольшее значение, очевидно, при том же самом значении x, при каком и величина

$$S^2=x^2(1-x^2).$$

Положим $x^2=X$, и тогда получим

$$S^2=X(1-X).$$

Величина $X(1-X)$ принимает наибольшее значение $\frac{1}{4}$ (как мы видели в пункте 3) при $X=\frac{1}{2}$, т. е. при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Итак, при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ величина S принимает наибольшее значение, именно,

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотренные примеры 1—4 иллюстрируются следующими чертежами, на которых показаны также и графики площади S.

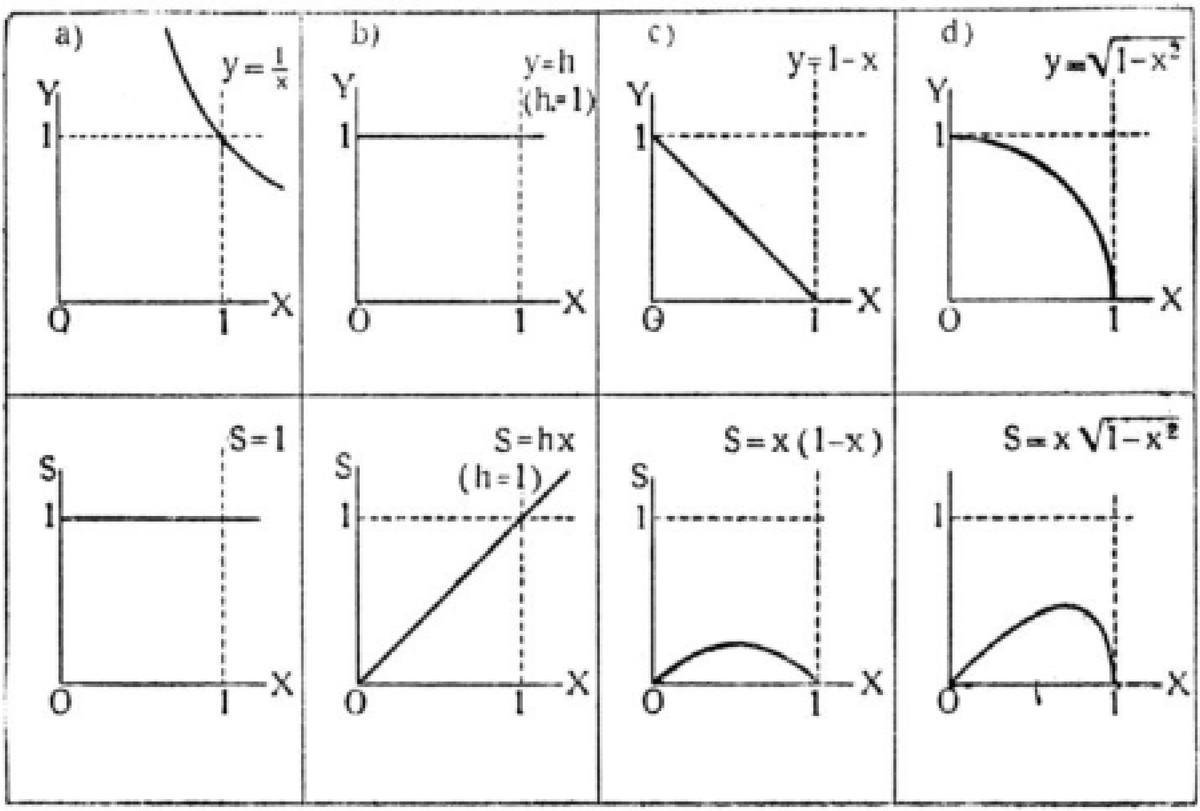


Чертёж 33

Упражнение 19

Кривая (Γ) представляет собою ту дугу окружности

$$x^2+y^2=1, \qquad y=\sqrt{1-x^2},$$

которая остаётся в пределах первого квадранта координатной системы, когда вся окружность опускается (перемещается в отрицательном направлении параллельно оси Oy) на расстояние d (причём $0<d<1$). Это расстояние d определяется из того условия, что дуга (Γ) перемещённой окружности отсекает на оси Ox отрезок, равный a (причём, очевидно, $0<a<1$, $a^2+d^2=1$).

Требуется:

1) по данному значению a определить d.

2) Ведя вычисление в четырёх знаках после запятой, вычислить и записать в виде таблицы значения y при значениях x, равных

$$0;\ 0{,}1a;\ 0{,}2a;\ 0{,}3a\ \ \ldots;\ 0{,}9a;\ a.$$

3) Пользуясь найденными значениями x и y, построить по точкам дугу окружности (Γ); если возможно, отметить на чертеже центр окружности O и проконтролировать построение с помощью циркуля.

4) При тех же значениях x вычислить значения площади S прямоугольника (Q), связанного с точками $M(x,\ y)$ на дуге (Γ); записать результаты в виде таблицы.

5) Построить по точкам график площади S в зависимости от абсциссы x.

6) Пользуясь печатными таблицами (Барлоу или любыми, какие есть под рукой), по возможности точнее определить то значение x, при котором S принимает наибольшее значение, а также самое это наибольшее значение.

7) Нарисовать на чертеже вписанный в фигуру, образованную дугой окружности (Γ) и осями Ox, Oy, прямоугольник (Q) наибольшей площади, отмечая точку M, с которой он связан.

Методические замечания

1. Значения a можно выбирать из промежутка

$$0{,}4 < a < 0{,}9.$$

Значения $a = 0{,}6$ и $a = 0{,}8$ в особенности замечательны тем, что приводят к рациональным значениям.

2. Можно рекомендовать делать два чертежа один над другим, изображая на верхнем график y (дуга окружности), на нижнем — график S, и, конечно, непременно с одинаковыми масштабами по обеим горизонтальным осям. Этот масштаб следует рассчитывать таким образом, чтобы a равнялось точно 20 клеточкам. Масштаб по оси Oy должен быть тот же, что и по осям Ox: иначе кривая (Γ) будет дугой эллипса, но не окружности. Масштаб по оси OS безразличен.

Образец: $a = 0{,}8$

Основной лист

$d = \sqrt{1 - a^2} = 0{,}6;\qquad 0{,}1a = 0.8$

x	x^2	$1 - x^2$	$\sqrt{1 - x^2}$	$y = \sqrt{1 - x^2} - 0{,}6$	$S = xy$
0,00	0,0000	1,0000	1,0000	0,4000	0,0000
0,08	0,0064	0,9936	0,9968	0,3968	0,0317
0,16	0,0256	0,9744	0,9871	0,3871	0,0619
0,24	0,0576	0,9424	0,9608	0,3608	0,0866
0,32	0,1024	0,8976	0,9474	0,3474	0,1111
0,40	0,1600	0,8400	0,9152	0,3152	0,1261
0,48	0,2304	0,7696	0,8773	0,2773	0,1331
0,56	0,3136	0,6864	0,8297	0,2297	0,1286
0,64	0,4096	0,5904	0,7684	0,1684	0,1077
0,72	0,5184	0,4816	0,6940	0,0940	0,0677
$a = 0{,}80$	0,6400	0,3600	0,6000	0,0000	0,0000
0,48	0,2304	0,7696	0,877268	0,277268	0,133088
0,49	0,2401	0,7599	0,871722	0,271722	0,133144
0,50	0,2500	0,7500	0,866025	0,266025	0,133012

Наибольшая площадь $S = 0{,}1331$ у прямоугольника (Q), для которого $x = 0{,}49$.

Образец: $a = 0,8$

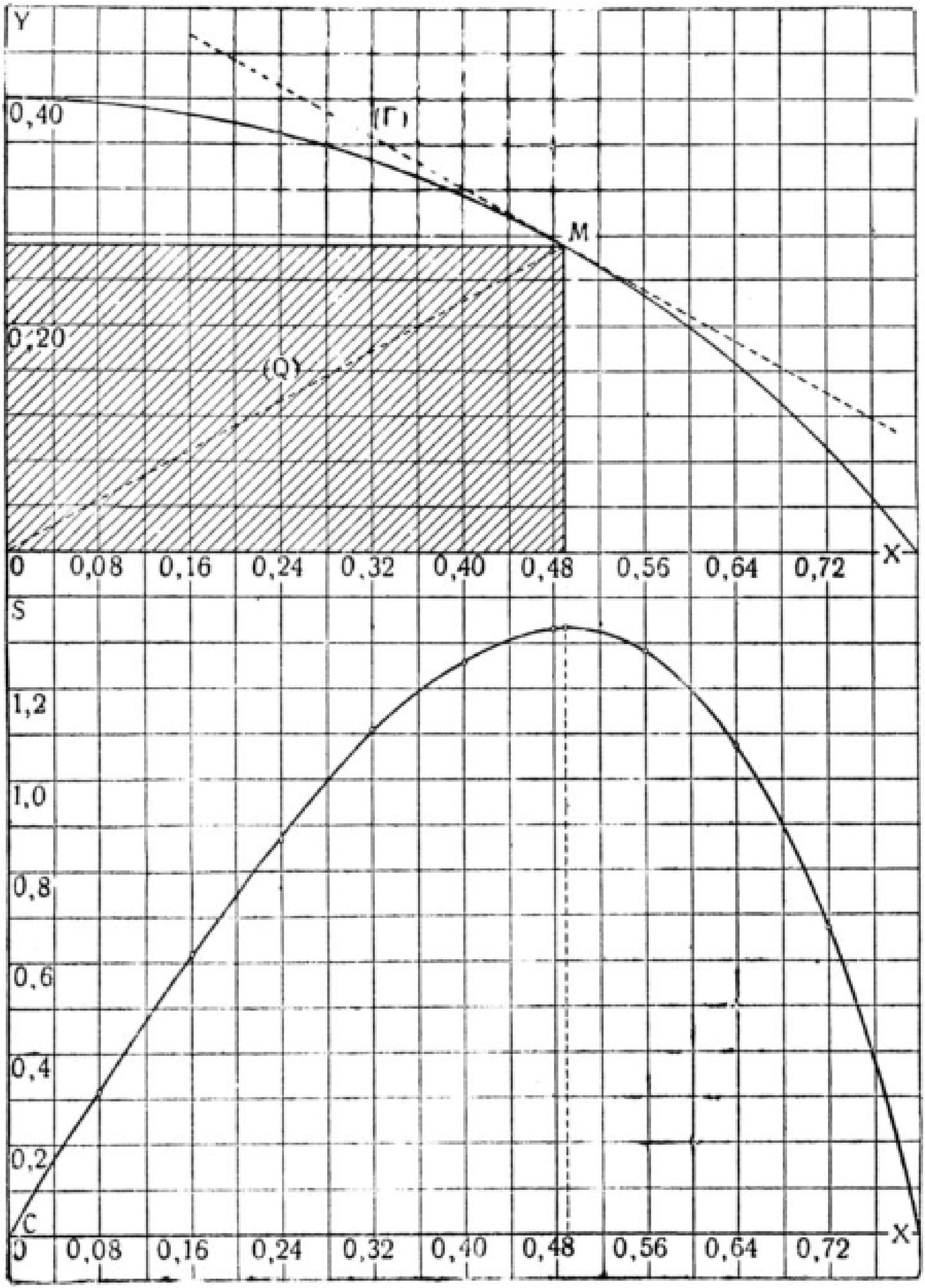


Чертёж 34

3. На вспомогательном листе естественно располагать побочные арифметические действия: вычитание (при переходе от столбца $\sqrt{1-x^2}$ к столбцу $y=\sqrt{1-x^2}-d$) и сокращённые умножения (при переходе от столбца y к столбцу $S=xy$).

4. Учащийся пользуется одним контролем: графическим — гладкостью получаемых графиков; кроме того, правильность точечного построения дуги окружности (Γ) проверяется циркулем, если только центр C оказался в пределах чертежа.

Преподавателю может быть рекомендован и дифференциальный контроль. Из равенства $S=xy$ следует посредством дифференцирования:

$$S'=xy'+y,$$

и если S достигает наибольшего значения, то должно иметь место равенство

$$S'=0,$$

т. е.

$$y'=-\frac{y}{x}.$$

Это значит, что в точке M, отмеченной на чертеже, наклон касательной лишь знаком должен отличаться от наклона радиуса-вектора OM (см. пунктиры на чертеже 34, стр. 148).

5. Приводим также чертёж, позволяющий делать проверку выполненной ученической работы посредством наложения (см. черт. 35). На нём вдоль оси Oy выписаны значения параметра a. Дуга (Γ) в ученической работе должна быть совмещена с соответствующей дугой нашего чертежа: тогда точка M в ученической работе окажется лежащей на плотно начерченной, идущей вверх и слегка вправо, дуге нашего чертежа.

20. ТЕКСТОВАЯ ЗАДАЧА О ПАРОХОДАХ

Упражнение имеет в виду: 1) применение графического представления функциональной зависимости в текстовых задачах с „жизненным“ условием, 2) чтение графика и исследование его с помощью вопросов функционального содержания.

Вопрос 1 (частный). Расстояние D между пунктами A и B равно 100 (*км*). Сколько часов T потребуется для переезда из A в B со скоростью $u=7$ (*км* в час)?

Решение. В буквенном виде задача решается формулой

$$T = \frac{D}{u}.$$

Чтобы получить числовое решение при заданных значениях $D = 100$, $u = 7$, достаточно подставить эти значения в формулу, и тогда будем иметь:

$$T = \frac{100}{7} \sim 14{,}29 \text{ (часов)}.$$

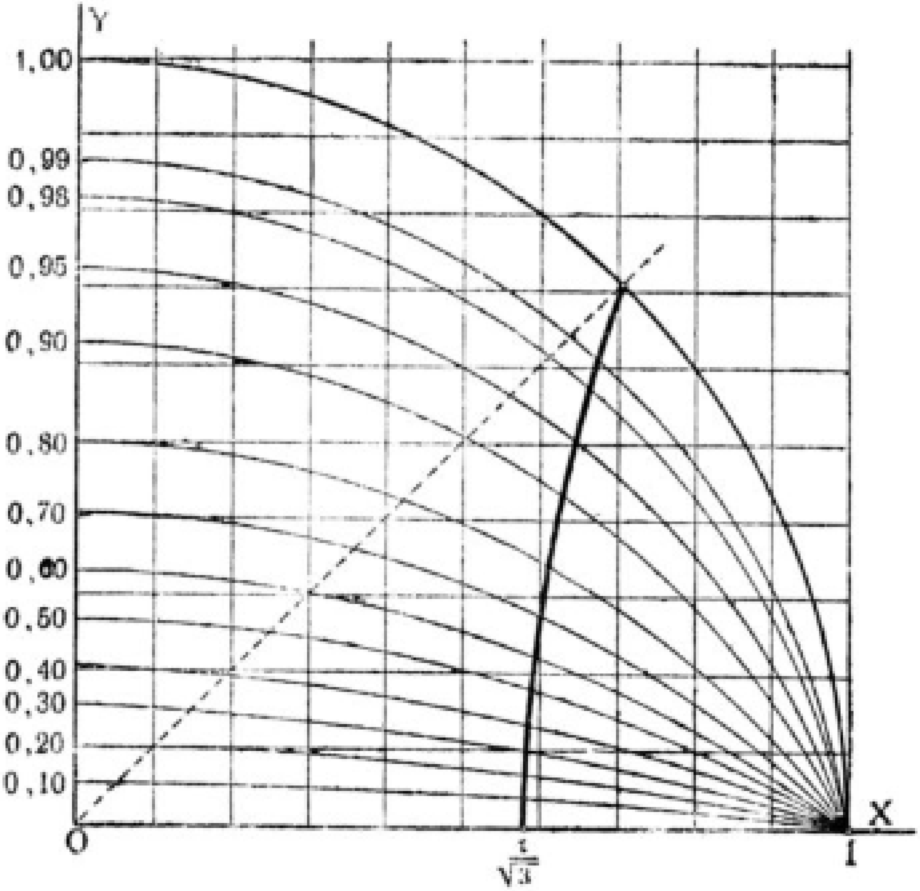


Чертёж 35 (уменьшено примерно в $1^{1}/_{2}$ раза)

Вопрос 2 (общий). Расстояние между пунктами A и B равно $D = 100$ (*км*). Как изменяется число часов T, необходимое для переезда из A в B в зависимости от скорости передвижения u (*км* в час)?

Решение. Нам дано только числовое значение D; что же касается величины u, то она предполагается переменной. Чтобы ответить совершенно исчерпывающим образом на поставленный общий вопрос, нужно ответить на бесконечное множество частных вопросов, соответствующих самым разнообразным значениям u. Таким образом, вопрос 2 приводит к составлению таблицы, связывающей между собою значения u и T согласно формуле $T = \frac{100}{u}$. Вот пример такой таблицы правда, содержащей лишь очень небольшое число значений u:

u	2	5	7	10	20	25	50	100	500	(*км* в час)
T	50	20	14,29	10	5	4	2	1	0,2	(часов)

То обстоятельство, что величины u и T измеряются не линейными единицами, имеют каждая свою размерность (u — есть скорость, T — есть время), — и нисколько не препятствует тому, чтобы ввести координатную плоскость О и Т и на ней отмечать в виде точек пары взаимно соответствующих значений u и T, указанных в таблице. Точек этих будет немного, и они не дают исчерпывающей картины интересующей нас зависимости. Однако они располагаются на чертеже с заметной правильностью, которая не нарушается при добавлении других точек, возникающих при расширении таблицы.

Полное (хотя может быть и не вполне точное) решение постановленного общего вопроса дается графиком уравнения $T = \frac{100}{u}$ — сплошной кривой, проведённой через отмеченные точки. С помощью графика нетрудно дать ответ (приближённый!) на всякий частный вопрос, соответствующий какому угодно заданному значению u.

Вопрос 3 (частный). Пункт B расположен на той же реке, что и пункт A, но на $D = 100$ (*км*) ниже по течению. За сколько часов T_1 пароход пройдёт вниз по течению из A в B со скоростью $u = 7$ (*км* в час), если течение реки имеет скорость $v = 3$ (*км* в час)?

Решение. В общую формулу

$$T_1 = \frac{D}{u + v}$$

придется подставить данные значения D, u и v:

$$T_1 = \frac{100}{7 + 3} = 10.$$

Вопрос 4 (общий). При том же расположении пунктов A и B, при том же расстоянии $D=100$, при той же скорости $v=3$ течения реки, — как изменяется время переезда парохода T_1 вниз по течению из A в B в зависимости от скорости парохода u?

Решение должно заключаться в составлении таблицы и графика, согласно формуле

$$T_1=\frac{100}{u+3}.$$

Вопрос 5 (частный). При тех же данных, что и и вопросе 3, — за сколько часов T_2 пароход со скоростью $u=7$ (*км* в час) проедет **вверх** по течению из A в B?

Решение. В общую формулу

$$T_2=\frac{D}{u-v}$$

нужно подставить значения D, u и v:

$$T_2=\frac{100}{7-3}=25.$$

Вопрос 6 (общий). При тех же данных — как изменяется время переезда парохода T_2 вверх по течению из B в A, в зависимости от скорости парохода?

Решение заключается в составлении таблицы и графика согласно формуле

$$T_2=\frac{100}{u-3}.$$

Мы предполагали, что скорость течения реки имеет известное нам постоянное значение $v=3$ и что скорость парохода является переменной.

Но можно взглянуть на дело и с иной точки зрения, исходя из предположения, что скорость парохода неизменна, например, $u=7$, тогда как скорость реки v возможна та или иная — в зависимости, допустим, от времени года; или, скажем, вовсе не обязательно, чтобы речь шла об одной и той же реке и об одних и тех же пунктах A и B.

Вопросы 7 и 8. При данной скорости парохода $u=7$ (*км* в час) как изменяется время переезда T_1 из пункта A в пункт B вниз по течению реки и время переезда T_2 из пункта B в пункт A вверх по течению реки — в зависимости от скорости течения реки v (*км* в час)?

Решение заключается в составлении таблиц и графиков согласно формулам

$$T_1 = \frac{100}{7+v}\,,\ T_2 = \frac{100}{7-v}\,,$$

причём переменной независимой является величина v.

Упражнение 20

Пункты A и B расположены на одной и той же реке, причём пункт B — на $D = 100$ (*км*) ниже, чем A.

Пусть T_1 — время переезда парохода вниз по течению из A в B (продолжительность прямого рейса); T_2 — время переезда вверх по течению из B в A (продолжительность обратного рейса); $T = T_1 + T_2$ — продолжительность двойного рейса, туда и обратно.

Требуется выяснить (посредством составления таблиц и графиков):

I. Как изменяются величины T_1, T_2 и T при постоянной скорости течения реки $v = b$ в зависимости от изменения скорости парохода u $(u > b)$?

II. Как изменяются величины T_1, T_2 и T при постоянной скорости парохода $u = a$ в зависимости от изменения скорости течения реки v $(0 \leqslant v < a)$?

Указание. При вычислениях удобно пользоваться таблицами обратных величин.

Образец:

$a=7$, $b = 3$ (*км* в час).

Графики: см. чертежи 36 и 37 на стр 155 и 156

$$\text{I. } T_1 = \frac{100}{u+3}\,,$$

$$T_2 = \frac{100}{u-3}\,,$$

$$T = \frac{100}{u+3} + \frac{100}{u-3}$$

u	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. . .
$u+3$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	. . .
$u-3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	. . .
T_1	16,67	14,29	12,50	11,11	10,00	9,09	8,33	7,69	7,14	. . .
T_2	—	100,00	50,00	33,33	25,00	20,00	16,67	14,29	12,50	. . .
T	—	114,29	62,50	44,44	35,00	29,09	25,00	21,98	19,64	. . .

II. $T_1 = \frac{100}{7+v}$, $T_2 = \frac{100}{7-v}$, $T = \frac{100}{7+v} + \frac{100}{7-v}$.

v	0	1	2	3	4	5	6	7
$7+v$	7	8	9	10	11	12	13	14
$7-v$	7	6	5	4	3	2	1	0
T_1	14,29	12,50	11,11	10,00	9,09	8,33	7,69	7,14
T_2	14,29	16,67	20,00	25,00	33,33	50,00	100,00	—
T	28,58	29,17	31,11	35,00	42,42	58,33	107,69	—

Методические замечания

1. Рекомендуется предлагать целые значения a и b в пределах $6 \leqslant a \leqslant 13$, $1 \leqslant b \leqslant 5$.

2. Есть преимущество в том, чтобы при черчении графиков направлять ось T_1 вверх, ось T_2 — вниз, общую ось u или v — вправо (см. чертежи 36 и 37). При таком

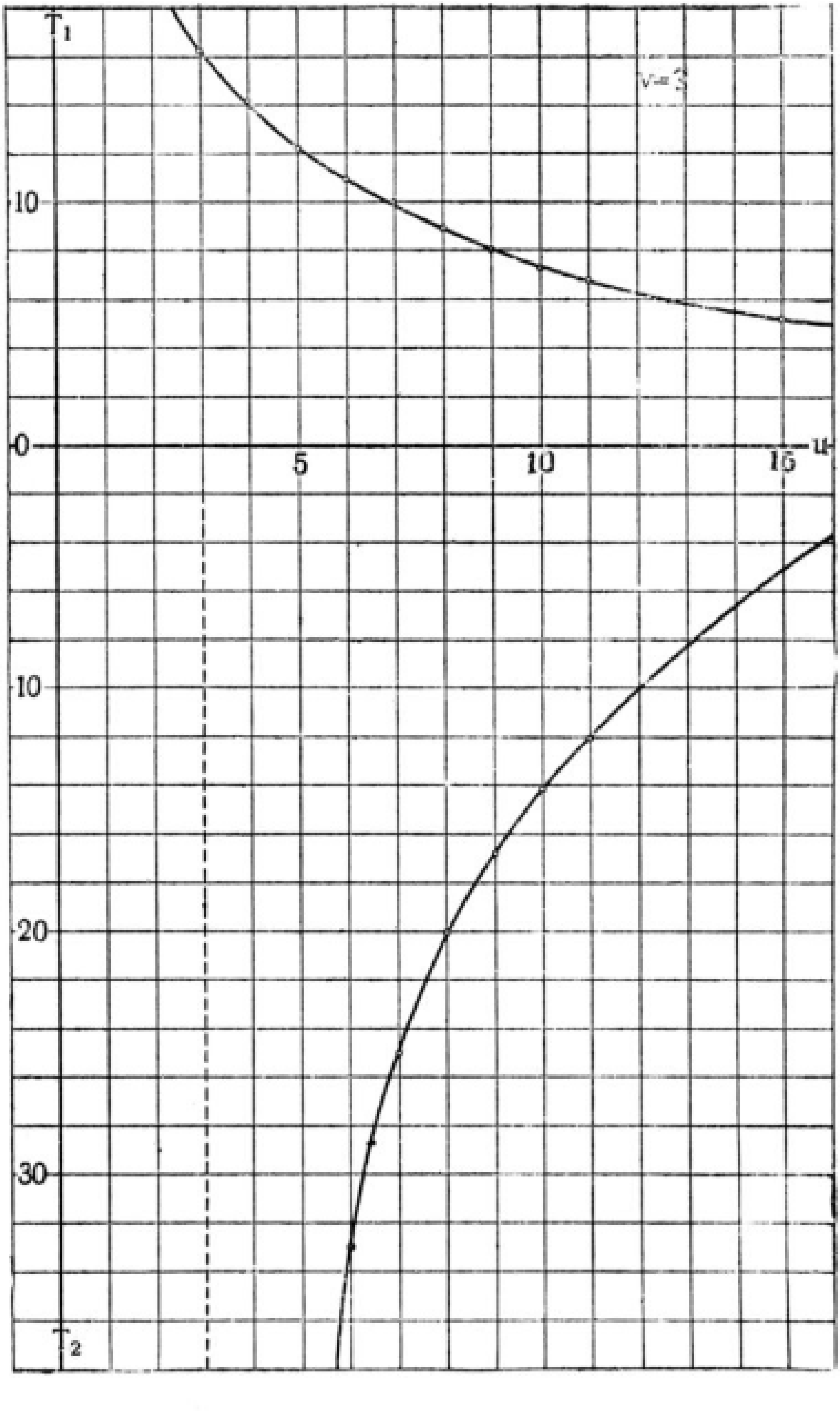


Чертёж 36

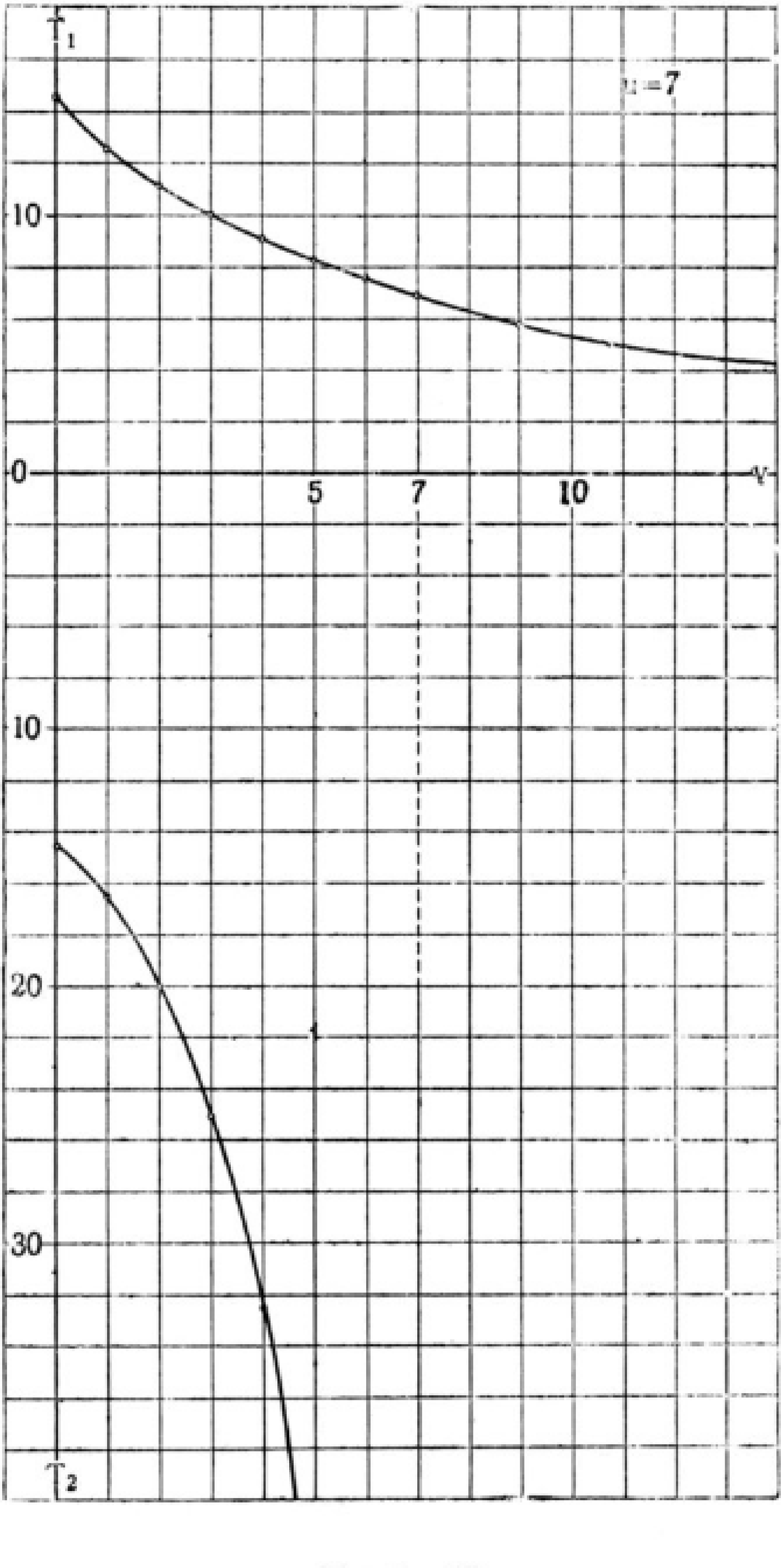


Чертёж 37

расположении осей нет необходимости чертить особый график для $T = T_1 + T_2$: при каждом определённом значении независимого переменного (абсциссы) значение T прочитывается как длина вертикального отрезка, заключённого между двумя графиками.

3. После того, как Упражнение 20 закончено, чрезвычайно полезно предлагать учащимся, глядя на график, отвечать устно на самые разнообразные вопросы, например:

При скорости течения $v = 3$ и скорости парохода $u = 12{,}7$, какова продолжительность прямого рейса? обратного рейса? двойного рейса?

При скорости парохода $u = 7$ и скорости течения $v = 1{,}8$, какова продолжительность прямого рейса? обратного рейса? двойного рейса?

Если скорость течения v равна 3, то какова должна быть скорость парохода, чтобы успеть сделать прямой рейс за 9 часов? Обратный — за 8 часов? Двойной — за 18 часов?

Если пароход имеет скорость $u = 7$, то при какой скорости течения v можно успеть сделать двойной рейс за 40 часов?

Как изменяется продолжительность прямого рейса, если увеличивается скорость парохода, скорость течения?

Как изменяется продолжительность обратного рейса, если увеличивается скорость парохода, скорость течения, если уменьшается скорость парохода?

В текучей воде пароход сделает двойной рейс скорее или медленнее, чем в стоячей?

С увеличением скорости течения увеличивается или уменьшается продолжительность двойного рейса? и т. д.

21. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Упражнение имеет в виду: 1) пропедевтическое ознакомление с уравнением движения точки по прямой, 2) применение известных из физики законов падения тяжелых тел.

Предположим, что точка M может перемещаться по прямой линии — числовой оси Ox с делениями, нанесёнными в определённом масштабе и с определённым образом выбранным направлением отсчета. Пусть через x обозначается координата точки M на прямой Ox[1].

Предположим также, что счет времени ведётся в определённых единицах (например, секундах), что выбрано определённое начало отсчёта (например, 12 ч. дня в такой-то день) и направление отсчёта (никто не считает время от будущего к прошлому: все считают от прошлого к будущему). При таких условиях момент времени t играет такую же роль на воображаемой „оси времени“, как точка — на „числовой оси“ — прямой линии.

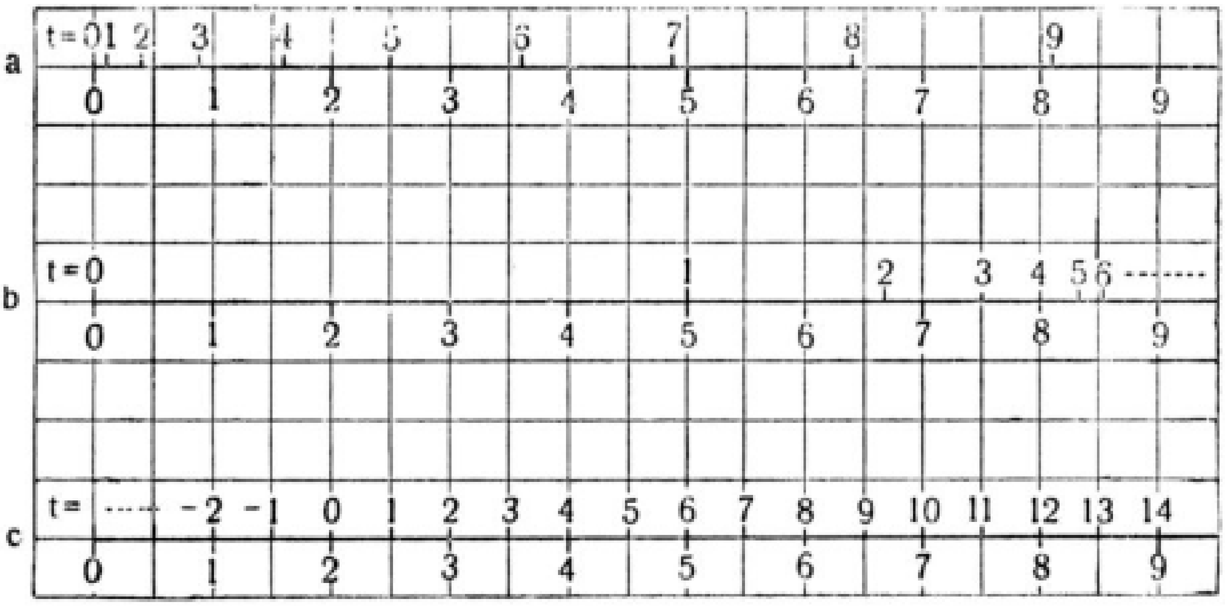


Чертёж 38

Пример 1. Рассмотрим формулу

$$x = \frac{1}{10} t^2,$$

каждому моменту времени сопоставляющую некоторое положение точки x на оси Ox. Табличка

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	4,9	6,4	8,1	10,0

показывает, какое именно положение занимает точка M в начальный момент, через одну секунду, через две секунды и т. д.

---

[1] Вместо „точка с координатой x“ говорят ради краткости „точка x“.

На чертеже 38 *a* деления на самой оси Ox отмечены черточками вниз, а положение точки M в различные моменты времени черточками вверх: упомянутые моменты времени выписаны при самих точках. Мы видим, что с течением времени точка M перемещается слева направо, притом — ускоренно: за каждую следующую секунду точка проходит бо́льший путь, чем за предыдущую.

Исходная формула, описывающая перемещение точки по прямой линии, называется иногда **уравнением движения** точки.

Пример 2. Уравнение

$$x=\frac{10t}{t+1}$$

определяет движение иного характера (см. чертеж 38 *b*).

Если в примере 1 точка ускоренно удаляется вправо на неограниченное расстояние, то в примере 2, как можно судить по табличке

t	0	1	2	3	4	5	6	...
x	0	5	$6\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{2}$	8	$8\frac{1}{3}$	$8\frac{4}{7}$	...

точка M перемещается вправо **замедленно**, и так как при любом положительном значении t

$$\frac{10t}{t+1}<\frac{10t+10}{t+1}=10,$$

то она никогда не достигнет точки $x=10$.

Пример 3. В случае, если уравнение движения — линейное, например, имеет вид:

$$x=\frac{t+4}{2},$$

то легко убедиться (хотя бы составляя табличку), что движение — равномерное: в нашем примере (см. чертеж 38 *c*), оно совершается слева направо, со скоростью $\frac{1}{2}$ *см* в секунду.

Упражнение 21

Тело, брошенное вертикально вверх с высоты a (*м*) и с начальной скоростью $v\left(\frac{м}{сек}\right)$ (зависящей от силы толчка), совершает дальнейшее движение, согласно формуле

$$x = a + vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

где t — время (в секундах), отсчитываемое от начала движения, x — координата в метрах по воображаемой вертикальной числовой оси; коэффициент g („ускорение силы тяжести“) равен 9,81.

При данных числовых значениях a и v: 1) составить табличку, показывающую высоту тела x в различные моменты времени от начала движения до падения на землю, 2) на вертикальной числовой оси сделать соответствующие пометки, 3) построить график в координатной плоскости Otx, направляя ось Ot вправо, ось Ox — вверх (с сохранением прежнего масштаба), 4) установить, в какой момент тело достигнет наибольшей высоты и какой именно, 5) в какой момент тело упадёт на землю.

***Образец*: $a = 25$, $v = 40$**

График: см. черт. 39

$$\boxed{x = 25 + 40t - \frac{1}{2}gt^2}$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$25 + 40t$	25	65	105	145	185	225	265	305	345	...
$\frac{1}{2}gt^2$	0	5	20	44	78	122	176	240	314	...
x	25	60	85	101	107	103	89	65	31	...

Наибольшая высота, равная примерно 107 *м*, достигается приблизительно через четыре секунды после начала движения.

Момент падения тела на земле определяется как положительный корень уравнения $25 + 40t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$:

$$t \sim 8{,}73.$$

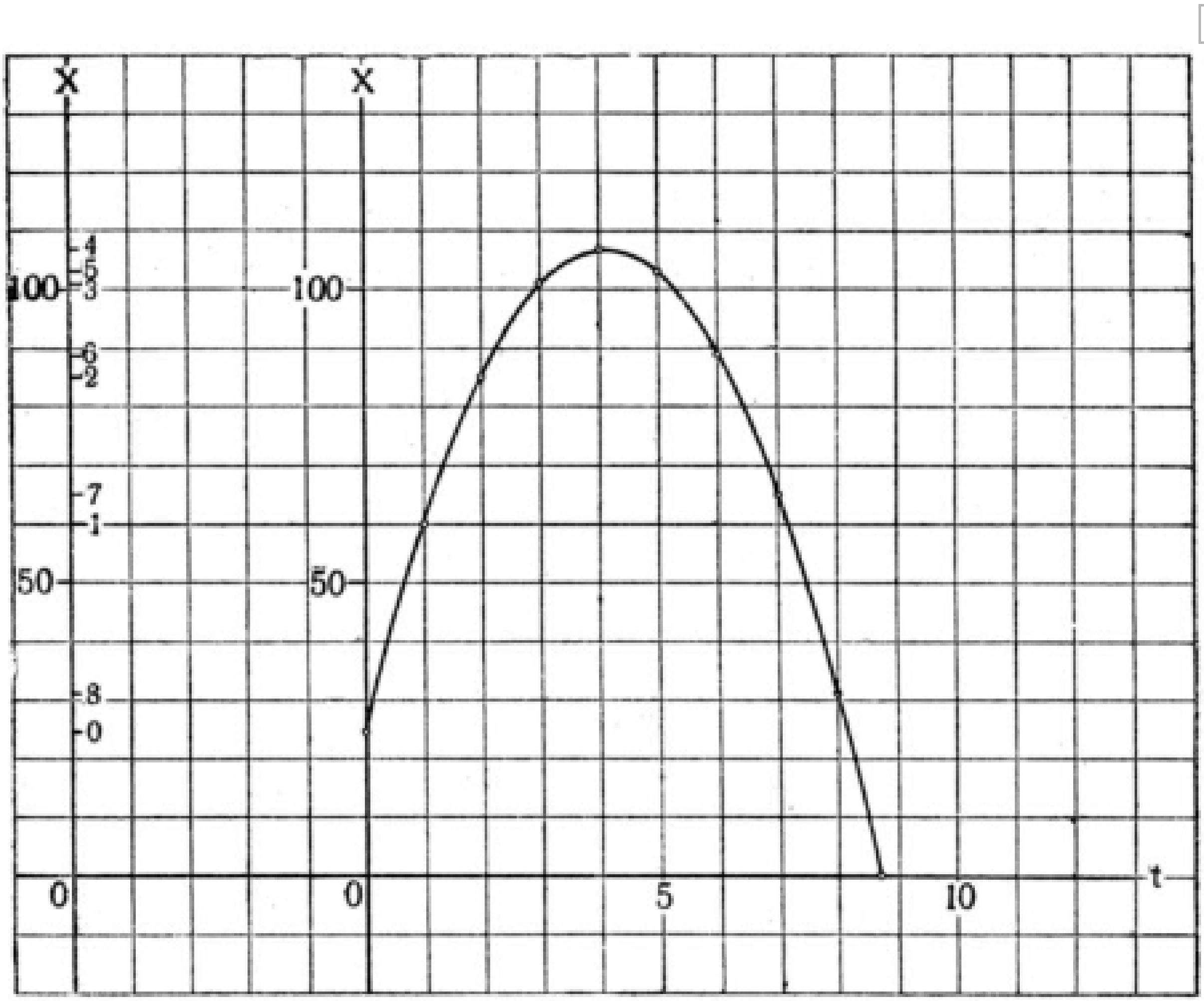


Чертёж 39

Методические замечания

1. Возможный выбор подходящих значений a и v довольно широк: можно рекомендовать руководствоваться неравенствами

$$20 < a < 50, \qquad 20 < v < 50.$$

2. Выбор масштабов можно предоставить учащимся.

3. Решение уравнения

$$a + vt - \frac{1}{2} gt^2 = 0$$

лучше провести совместно в классе, в буквенной форме:

$$t = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2ag}}{g}$$

и обсудить вопрос о знаке перед корнем. Учащимся останется подстановка числовых значений.

4. Не излишне показать и точный метод нахождения наибольшей высоты поднятия. Преобразование

$$x = a + vt - \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2g} \; [(v^2 + 2ag) - (gt - v)^2]$$

показывает, что

$$x \leqslant \frac{v^2 + 2ag}{2g} ,$$

причём равенство имеет место только при $t = \frac{v}{g}$. Итак, наибольшая высота, равная $a + \frac{v^2}{2g}$, достигается в момент времени $t = \frac{v}{g}$.

В нашем примере наибольшая высота равна

$$25 + \frac{40^2}{2 \cdot 9{,}81} \sim 106{,}55$$

и достигается при

$$t = \frac{40}{9{,}81} \sim 4{,}08.$$

22. ДВИЖЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

Упражнение имеет в виду: 1) пропедевтическое ознакомление с уравнениями движения точки на плоскости („параметрические уравнения"), 2) повторение и укрепление навыков операций с многочленами.

Пример. Рассмотрим систему двух формул

$$\begin{cases} x = 10\,t^2 \\ y = \quad\;\; t^3. \end{cases}$$

Предположим, что t обозначает время, а x и y — координаты точки M в плоскости Oxy. Каждому значению t формулы сопоставляют пару значений x, y, т. е. некоторое положение точки M. Когда t изменяется, точка M, вообще говоря, каким-то образом перемещается в плоскости Oxy. Так можно составить, например, следующую табличку:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	. .
x	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210	1440	. .
v	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	. .

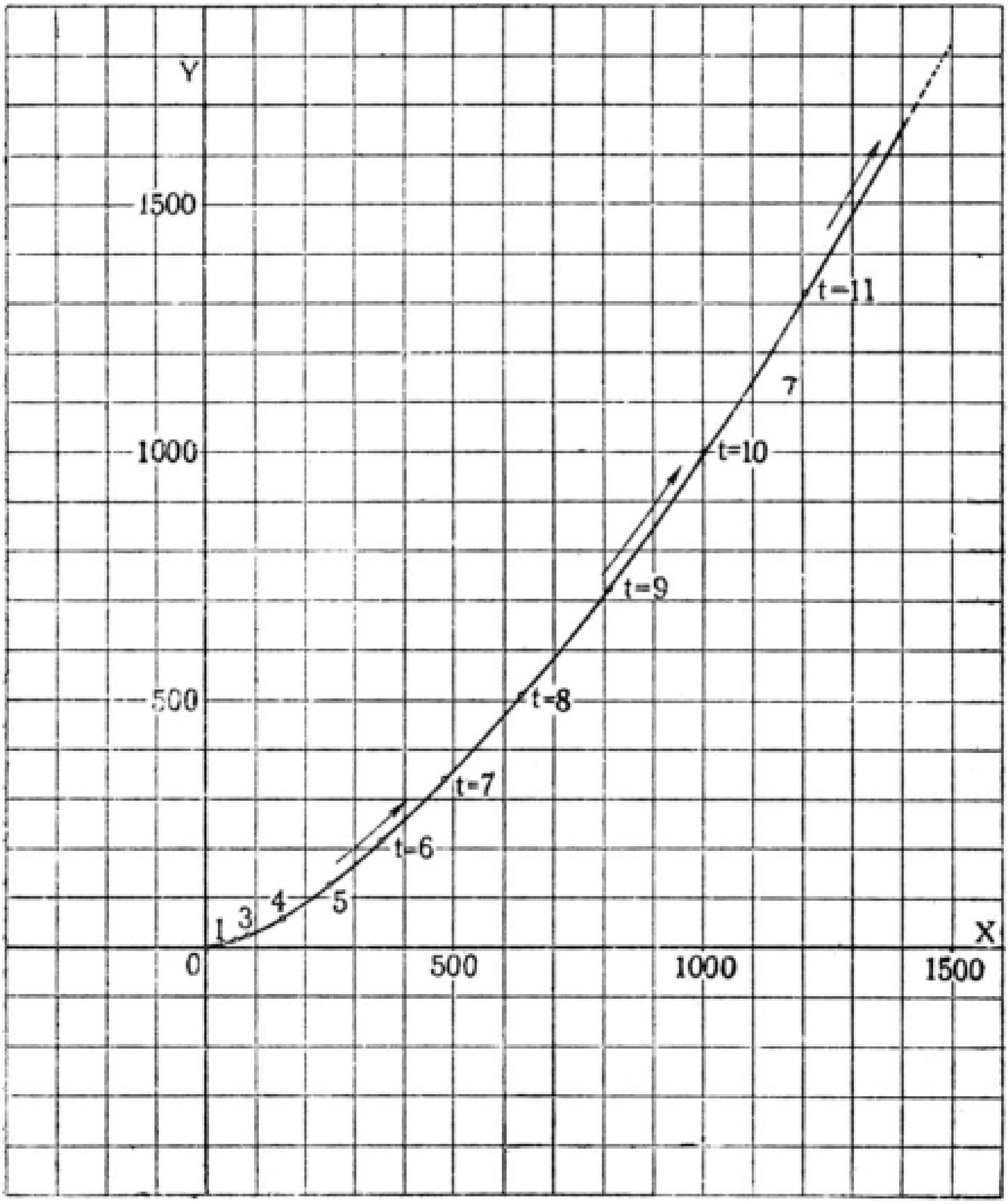


Чертёж 40

Эта табличка показывает, где находится точка M в начале движения, через секунду, через две секунды и т. д.

Отмечая последовательные положения точки M в плоскости Oxy, не лишним является около точек ставить соответствующие значения t (см. чертёж 40 на стр. 163). При непрерывном изменении t точка описывает кривую — траекторию движения.

Направление движения на чертеже отмечено стрелочкой.

Рассматриваемая система формул носит название уравнений движения точки M.

Упражнение 22

Даны уравнения движения точки M на плоскости вида

$$\begin{cases} x = At^3 + Bt^2 + Ct + D \\ y = A't^3 + B't^2 + C't + D' \end{cases}$$

Составить таблицу значений x и y, соответствующих целым значениям в пределах $-10 \leqslant t \leqslant 10$; отметить соответствующие положения точки M на плоскости; провести кривую — траекторию движения; направление движения по кривой для большей наглядности указать стрелочкой.

Образец

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t^2 - 41t + 42 \\ y = t^3 + 6t^2 - 45t - 162 \end{cases}$$

t	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
x	−748	−480	−270	−112	0	72	110	120	108	80
y	−112	0	70	104	108	88	50	0	56	−112

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	42	0	−40	−72	−90	−88	−60	0	98	240	432
y	−162	−200	−220	−216	−182	−112	0	160	374	648	988

Образец

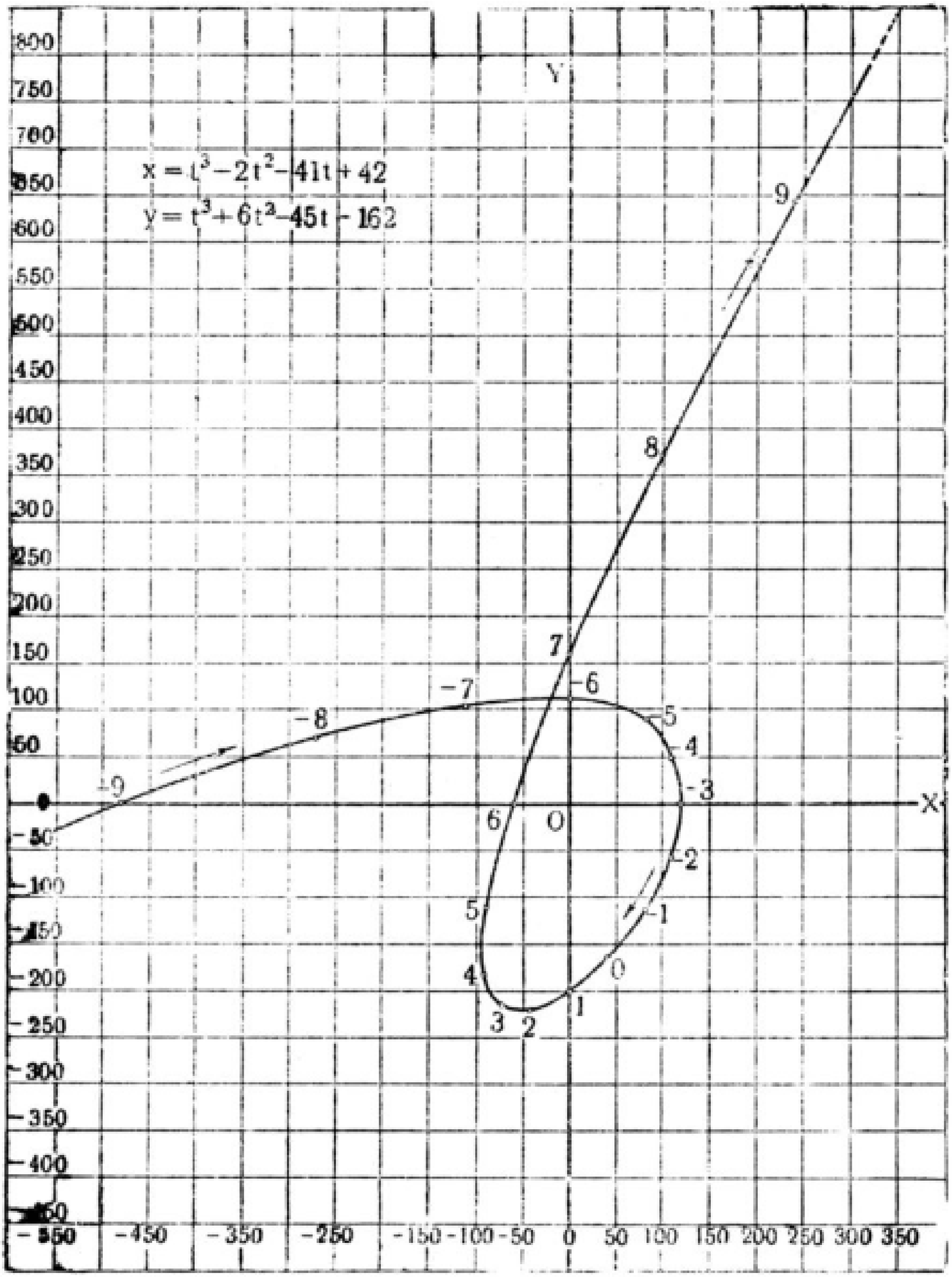


Чертёж 41

Методические замечания

1. В правых частях уравнений движения можно писать любые два различных многочлена третьей степени из ассортимента, приведённого в методических указаниях к Упражнению 18: достаточно заменить x через t.

Общий характер получаемых движений заключается в том, что при увеличении от -10 до $+10$ точка M из третьего квадранта координатной плоскости перейдёт в первый; вначале быстрое движение постепенно замедляется, в особенности в то время, когда точка „блуждает“ по близости от начала координат; затем, покидая окрестность начала, она снова ускоряет своё движение. Траектория движения в некоторых случаях может сама себя пересекать.

2. Вполне целесообразно при подстановках значений t в многочлены третьей степени пользоваться приёмами, указанными в Упражнении 18. Необходимые вычисления делаются на вспомогательном листе. Там же полезно дать графики x и y, рассматриваемых как функции t.

3. Контролировать легко по корням многочленов. Так как, например, в приведённом образце

$$t^3-2t^2-41t+\ 42=(t+6)(t-1)(t-7),$$
$$t^3+6t^2-45t-162=(t+9)(t+3)(t+9),$$

то траектория движения пересекает ось Oy при $t=-6,\ 1,\ 7$, а ось Ox при $t=-9-3,\ 6$.

23. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ЛУЧУ

Упражнение имеет в виду пропедевтику полярных координат с учётом, впрочем, того обстоятельства, что ещё не начато изучение тригонометрии и учащимся неизвестно радианное измерение углов.

Представим себе, что точка M совершает некоторое движение по лучу (полупрямой) Or с вершиной O. Луч рассматривается как числовая полупрямая с делениями, позволяющими устанавливать в любой момент времени t расстояние r точки M от вершины O. Движение задаётся формулой, выражающей расстояние r через время („уравнение движения“).

С другой стороны, вообразим координатную плоскость Oxy и, считая, что вершина луча Or все время совпадает с началом координат O, представим себе луч Or вращающимся таким образом, что:

1) в начальный момент $t=0$ направление луча Or совпадает с направлением Ox,

2) вращение Or совершается против часовой стрелки, т. е. от оси Ox к оси Oy и далее,

3) угловая скорость вращения постоянна, а именно, такова, что луч Or поворачивается на прямой угол за четыре секунды времени.

Нас интересует: какую траекторию в плоскости Oxy опишет точка M, движущаяся по лучу, согласно заданному уравнению движения?

Пример 1. Пусть движение точки M по лучу задаётся самым простым уравнением

$$r=mt,$$

где m — постоянный коэффициент.

Рассматриваемое движение равномерно и в принятых обозначениях (см. Упражнение 22) представлено на чертеже 42.

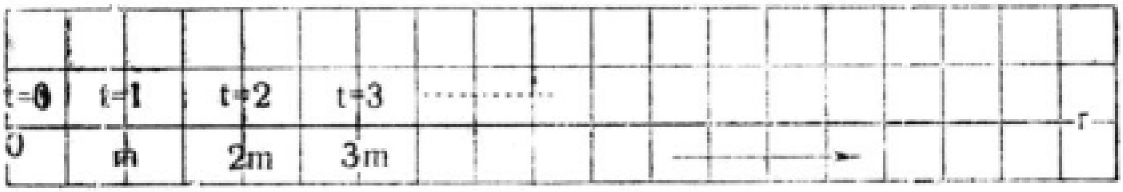


Чертёж 42

На следующем чертеже 43 (стр. 168) изображены последовательные положения вращающегося луча через каждую секунду и отмечены соответствующие положения точки M. Если за четыре секунды точка M сдвигается по лучу на расстояние m, то за каждую секунду она сдвигается на расстояние $\frac{1}{4}m$.

На чертеже ясно видна траектория, описываемая в плоскости Oxy точкой M: эта траектория называется спиралью Архимеда.

Пример 2. Если движение точки по лучу Or задаётся уравнением

$$r=\frac{100}{t},$$

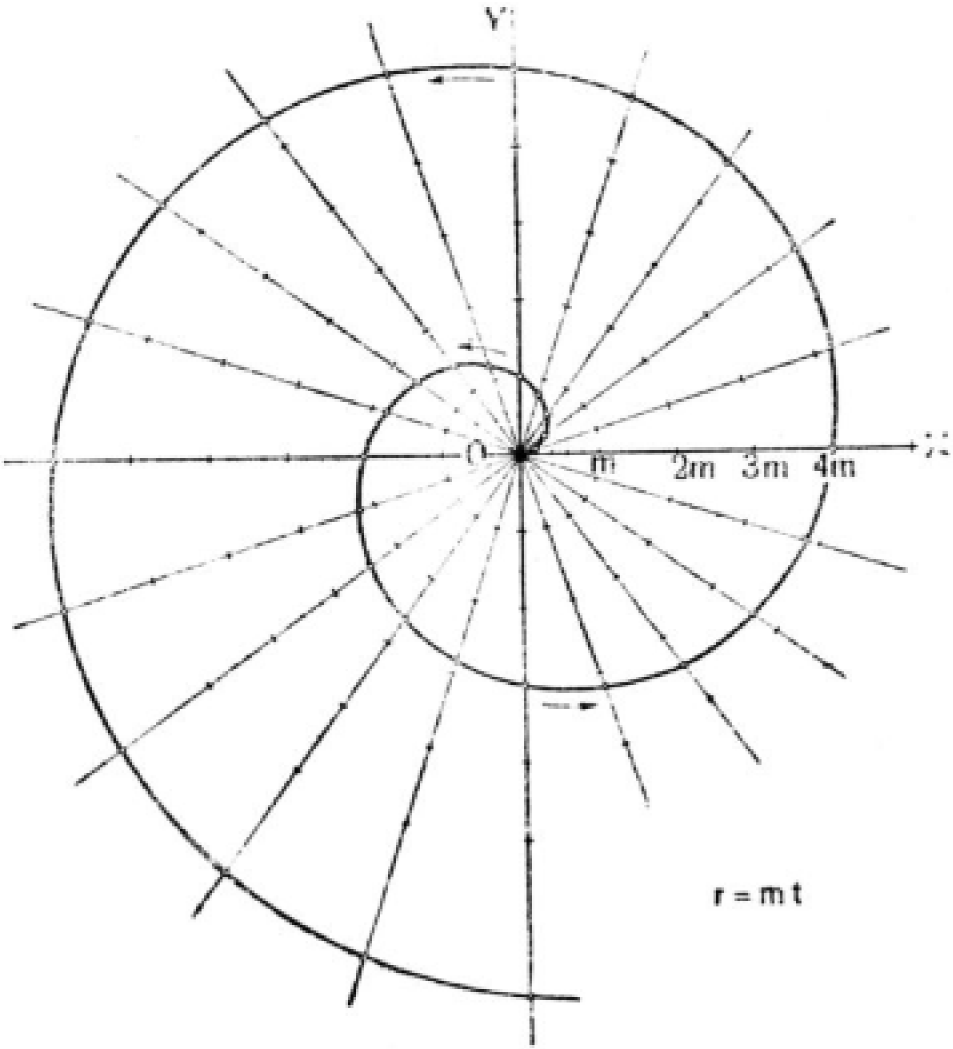

Y
O
X
m
2m
3m
4m
r = mt

Чертёж 43

то изменение r в зависимости от t описывается табличкой

t	. . .	4	5	6	7	8	. . .
r	. . .	25	20	16,67	14,28	12,50	. . .

или же чертежом 44.

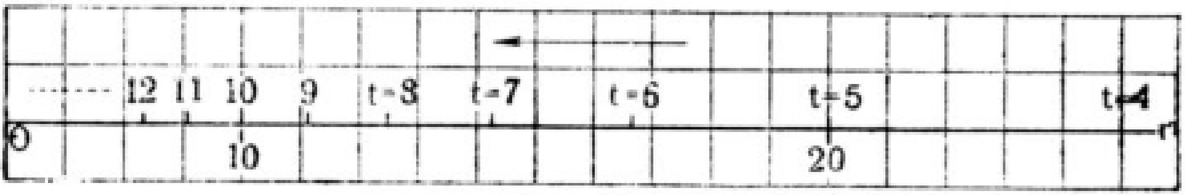

12
11
10
9
t=8
t=7
t=6
t=5
t=4
O
r
10
20

Чертёж 44

Чтобы построить по точкам интересующую нас траекторию, нужно на лучах в их положениях, соответствующих моментам времени $t=1, 2, 3$ и т. д., откладывать, считая от вершины O, отрезки, равные значениям r, имеющимся в таблице на стр. 168. Выполняя это построение и соединяя затем полученные точки плавной кривой, мы и получим нужную нам кривую (см. чертёж 45: кривая изображена в уменьшенном виде).

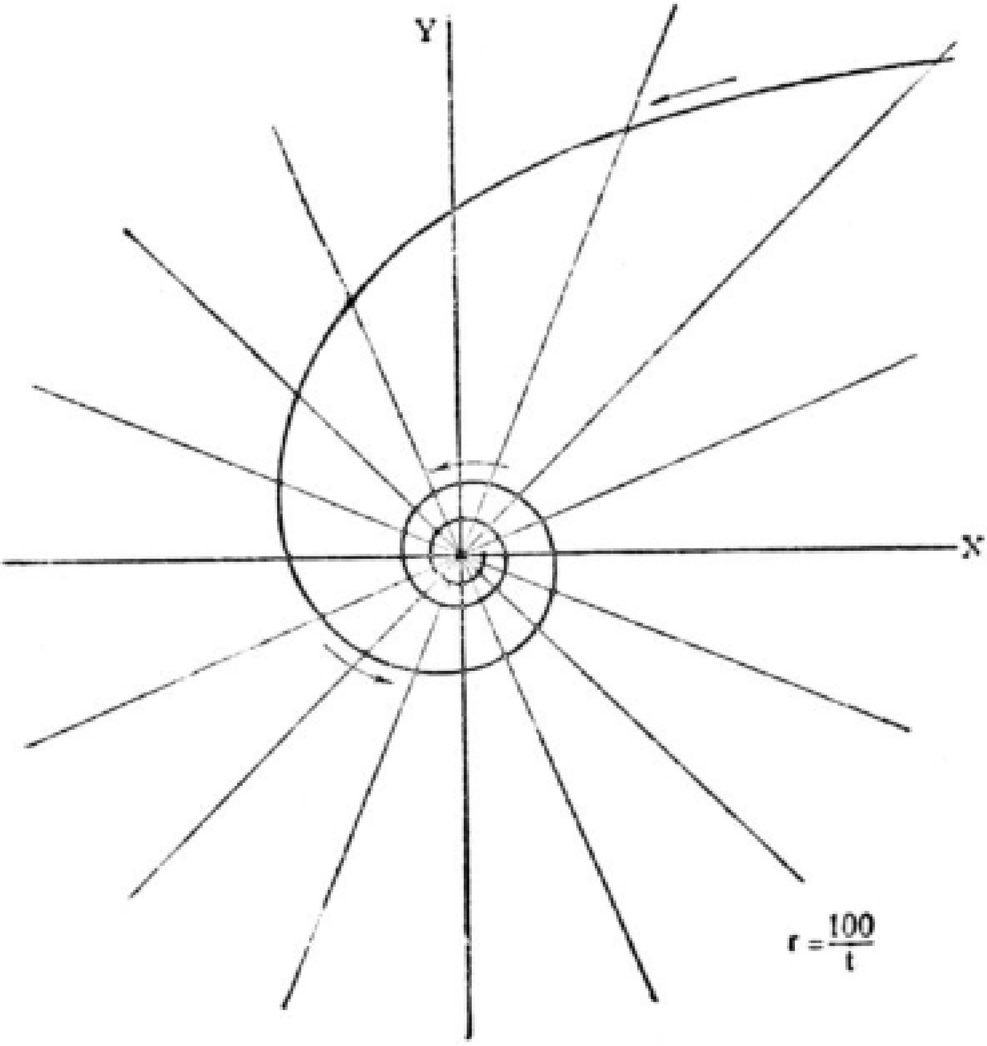


Чертёж 45

Эта кривая носит название гиперболической спирали[1].

Впримере 1 точка M удаляется по лучу в бесконечность, и потому спираль Архимеда раскручивается; напротив, в примере 2 точка M приближается по лучу к точке O (однако не достигая её), и потому гиперболическая спираль закручивается около начала O.

---

[1] Название объясняется тем, что расстояние OM обратно-пропорционально времени, а график обратной пропорциональности в прямоугольной системе координат как раз есть гипербола.

Упражнение 23

Уравнение движения точки M по вращающемуся лучу Or (как было описано раньше) имеет вид

$$r = a + \frac{b}{t}.$$

Составить таблицу значений r при значениях t, равных целым положительным числам секунд, и наметить траекторию движения точки M в плоскости Oxy.

Образец

$a = 10, \qquad b = -6$

График: см. чертёж 46

$$\boxed{r = 10 - \frac{6}{t}}$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	. . .
r	4	7	8	8,5	8,8	9	9,14	9,25	. . .

t	. . .	12	16	24	32	64	. . .
r	. . .	9,50	9,62	9,75	9,81	9,91	. . .

Методические замечания

1. Необходимо настойчиво добиваться, чтобы учащиеся при каждой отмечаемой точке ставили соответствующее значение t.

2. Если $b < 0$, то полезно поставить вопрос: при каком значении t — и, следовательно, при каком положении луча Or — точка M совпадает с началом O?

Тех значений t, при которых r становится отрицательным, рассматривать не следует.

3. Считая, что масштаб избирается по условию $1 = 1$ клеточка, можно рекомендовать давать значения a, удовлетворяющие неравенству $6 \leqslant a \leqslant 10$ при $b < 0$, и удовлетворяющим неравенству $3 \leqslant a \leqslant 6$ при $b > 0$. Что

касается коэффициента b, то от его знака зависит, навивается ли кривая на окружность радиуса a снаружи или

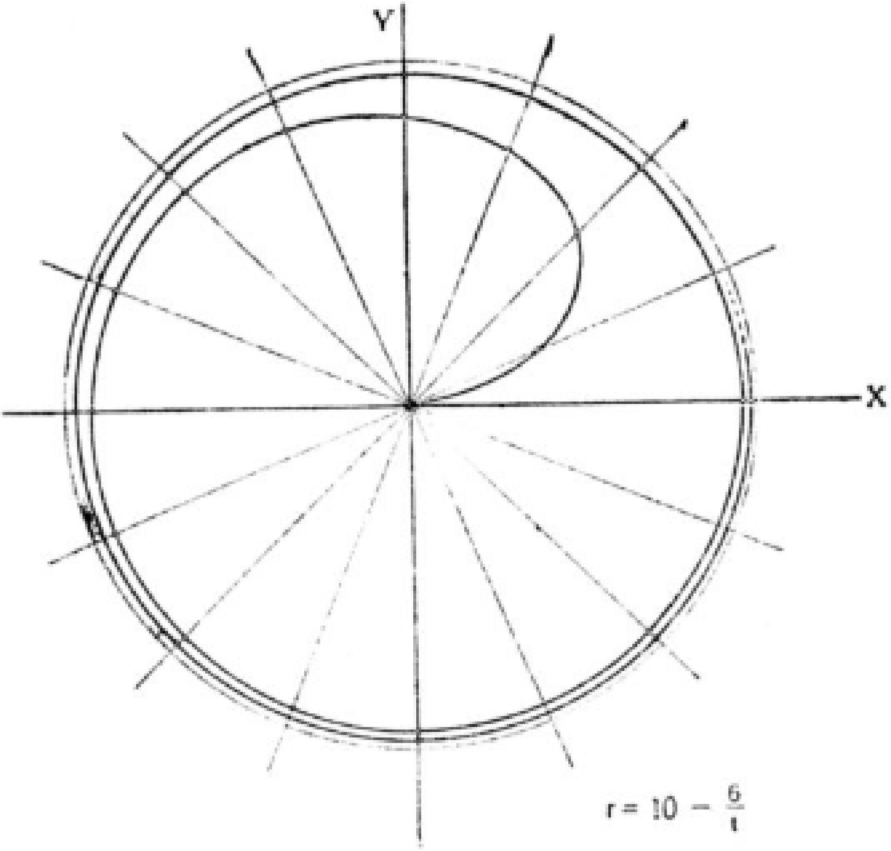


Чертёж 46

извне; по абсолютному значению лучше не брать b бо́льшим, чем a.

4. Чертёж **не** следует делать на клетчатой бумаге; но клетчатой бумагой можно воспользоваться, чтобы сделать из нее линейку, которая способна заменить измерительный циркуль.

24. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

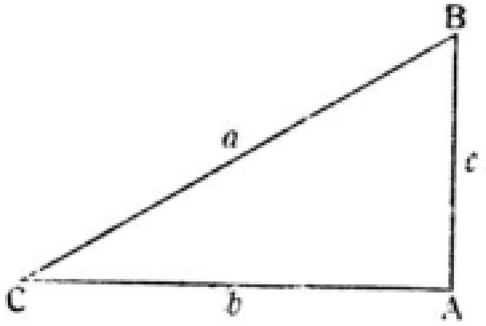
Упражнение имеет в виду: 1) тренировку в решении прямоугольных треугольников с помощью таблиц натуральных тригонометрических величин, 2) повторение сокращённого умножения и деления десятичных дробей.

Упражнение 24

Дать ответы на следующие ниже вопросы по пунктам I—IV, касающиеся решения прямоугольных треугольников.

Встречающиеся умножения и деления выполнять сокращённо[1]. Вычисления вести с тремя знаками после запятой, располагая их на вспомогательном листе.

В дальнейшем каждая сторона треугольника вместе с противолежащим ей углом обозначается одноимённой буквой.



I. В прямоугольном треугольнике дан катет b и прилежащий острый угол C; вычислить катет c и гипотенузу a.

Положить:

$b = p$,
$C = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots\ldots$, однако с ограничением $C < 90^\circ$.

II. В прямоугольном треугольнике даны катеты b и c; вычислить угол C.

Положить:

$b = p$,
$c = q, 2q, 3q, 4q, 5q$.

III. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и острый угол C; вычислить катеты c и b.

Положить:

$a = p$,
$C = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, с ограничением $C < 90^\circ$.

IV. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и катет c; вычислить углы C и B.

Положить:

$a = p$,
$c = q, 2q, 3q, \ldots\ldots$, с ограничением $c < a$.

---

[1] Это требование не является категорическим: в случае, если сокращённые действия — умножение и деление — не были пройдены классом, допустимо и применение действий в их обычной („полной") форме. Однако использовать при решении треугольников уже усвоенный алгорифм сокращённых действий более чем уместно.

К каждому и из пунктов I—IV составить чертёж, на координатной сетке, отвечающий имеющимся в задаче числовым данным. Воспользоваться им с целью контроля (путём „прикидки") вычислений, прибегая, если нужно, и к транспортиру.

Образец

Основной лист

$$p = 8{,}1264 \qquad q = 3{,}2748 \qquad \alpha = 21^\circ 40'.$$

I. $c = b \operatorname{tg} C, \quad a = \frac{b}{\cos C}$

$b = 8{,}1264$

C	$\operatorname{tg} C$	$\cos C$	$c = b \operatorname{tg} C$	$a = \frac{b}{\cos C}$
21°40′	0,39 727	0,92 935	3,228	8,744
43°20′	0,94 345	0,72 737	7,665	11,172
65°00′	2,14 451	0,42 262	17,427	19,229
86°40′	17,16 934	0,05 814	139,524	139,76

II. $\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$

$b = 8{,}1264$

c	$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$	C
3,2748	0,403	22°00′
6,5496	0,806	38°50′
9,8244	1,209	50°30′
13,0992	1,612	58°10′
16,3740	2,015	63°40′

III. $c = a \sin C, \quad b = a \cos C$

$a = 8{,}1264$

C	$\sin C$	$\cos C$	$c = a \sin C$	$b = a \cos C$
21°40′	0,36 921	0,92 935	3,003	7,550
43°20′	0,68 624	0,72 737	5,577	5,909
65°00′	0,90 631	0,42 262	7,364	3,433
86°40′	0,99 831	0,05 814	8,111	0,472

IV. $\sin C = \frac{c}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$

$a = 8{,}1264$

c	$\frac{c}{a} = \sin C = \cos B$	C	B
3,2748	0,403	23°50′	66°10′
6,5496	0,806	53°40′	36°20′

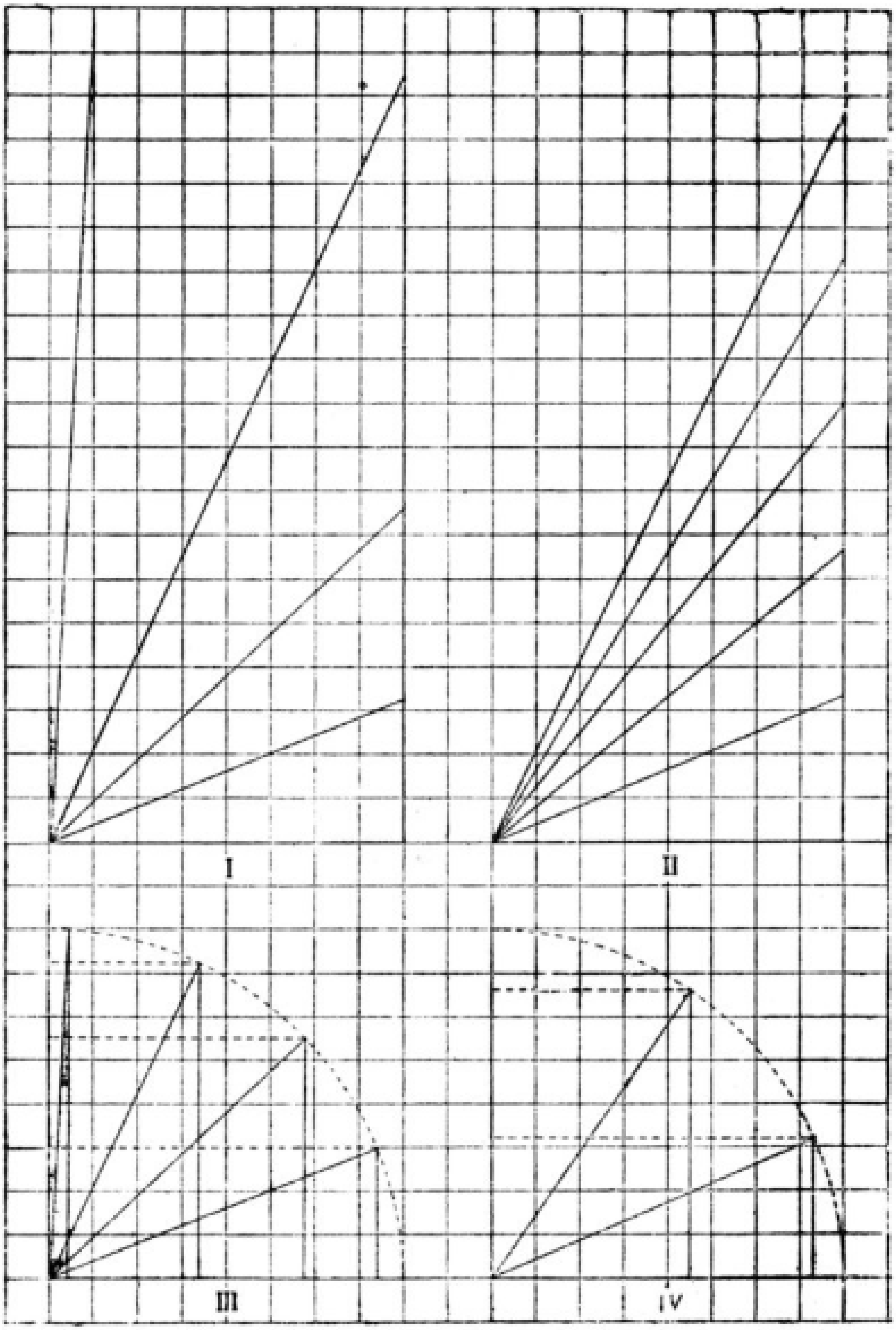


Чертёж 47

Вспомогательный лист

I.

$$\begin{array}{r}
0{,}39\overset{*}{7}3 \\
46\,218 \\ \hline
3\,178 \\
40 \\
8 \\
2 \\ \hline
3{,}228
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\overset{*}{8}1{,}264 & \overset{*}{9}{,}2935 \\ \cline{2-2}
74\,348 & 8{,}744 \\ \cline{1-1}
6\,916 & \\
6\,505 & \\ \cline{1-1}
411 & \\
372 & \\ \cline{1-1}
39 & \\
37 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

(всего четыре умножения
и четыре деления).

II.

$$\begin{array}{r|l}
3.\overset{*}{2}748 & \overset{*}{8}{,}1264 \\ \cline{2-2}
3\,250 & 0{,}403 \\ \cline{1-1}
25 & \\
24 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

(всего пять делений).

III.

$$\begin{array}{r}
3{,}6\overset{*}{9}21 \\
46\,218 \\ \hline
2\,954 \\
40 \\
2 \\
7 \\ \hline
3{,}003
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
0{,}929_{3\overset{*}{5}} \\
46\,218 \\ \hline
7\,434 \\
93 \\
18 \\
5 \\ \hline
7{,}550
\end{array}$$

(всего 8—10 умножений).

IV. (2—3 деления уже выполнены в пункте II).

Методические замечания

1. В Упражнении 24 особый акцент сделан на том, что синусы и тангенсы возрастают не пропорционально углу-аргументу. Если случится, что в процессе выполнения упражнения учащиеся не сумеют сделать и сформулировать соответствующее наблюдение, преподаватель должен им помочь в этом. Следует путём наводящих вопросов привлечь внимание учащихся к тому, что 1) в табличке I — в то время, как значения угла C получают одни и те же приращения, приращения катета $c = b \operatorname{tg} C$ заметно увеличиваются, 2) в табличке II точно так же значения катета c получают равные приращения, тогда как приращения угла C убывают, 3) таким же образом полезно сравнить в табличках III и IV приращения угла C и катета $c = a \sin C$. Необходимо установить, как отмеченные обстоятельства отражаются на чертежах; констатировать, что $\operatorname{tg} 2\alpha$ не равен (именно, больше), чем $2 \operatorname{tg} \alpha$, и что $\sin 2\alpha$ не равен (именно, меньше), чем $2 \sin \alpha$. Однако знания формул сложения здесь, конечно, не предполагается.

2. Значения p, q, α лучше всего раздавать на карточках. Чтобы чертежи вышли не слишком мелкими и все же поместились на 1—2 страницах, следует брать p в промежутке от 8 до 10; отношение $\frac{q}{p}$ должно заключаться в пределах от 0,30 до 0,45; угол α — в пределах от 15 до 25° (примерно).

3. Данные значения p, q, α целесообразно трактовать как точные, чтобы не осложнять упражнения вопросами оценки погрешностей, в зависимости от неточности данных. Конечно, преподаватель, под свою ответственность, может и нарушить эту рекомендацию, если класс раньше имел случай познакомиться с вопросом о приближённых вычислениях при неточных данных.

4. В приведённых образцах при вычислении углов (пункты II и IV) использованы таблицы, составленные через 10′, причём интерполяция не применяется. Однако возможно, что преподаватель пожелает дать объяснения по поводу интерполяции, и тогда он потребует, чтобы углы были вычислены с точностью до полуминуты.

5. Понятно, что представление вспомогательного листа обязательно для учащихся, независимо от того, пользуются ли они сокращёнными действиями.

6. Равным образом обязательно и представление чертежей, со строгим соблюдением масштаба $1 = 1$ клетка. Можно порекомендовать, чтобы черчение треугольников начиналось в пунктах I и II с вершины прямого угла, а в пунктах III и IV — с вершины острого угла C. Расположение указано в образце (см. чертёж 47 на стр. 174).

7. В зависимости от обстоятельств преподаватель предложит, если найдёт нужным, в каждом случае закончить решение треугольника, т. е. в пункте II вычислить также гипотенузу a и в пункте IV — катет b (для чего не потребуется тригонометрии). Он укажет также, разрешается ли при этом пользоваться таблицами квадратов и квадратных корней.

8. Если преподаватель пожелал бы сделать более тщательную проверку результатов работы, ему можно было бы посоветовать раздать учащимся одно и то же значение параметра p и проверять работы с помощью окружности радиуса p, проведённой в увеличенном масштабе на листе миллиметровой бумаги, оперируя при этом циркулем и транспортиром. Не излишним было бы при возврате работ продемонстрировать это приспособление и учащимся.

ПЕРЕЧЕНЬ УПРАЖНЕНИЙ С ДОБАВЛЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

№	Название упражнения	Класс и четв.	Предмет[1] и раздел курса	Время, нужное для выполнения[2]	Упражн., тематич. связанн.
1	Метод проверки с помощью девятки.	VI$_1$	Ар	У + Д	—
2	Проверка умножения табличным методом.	VI$_2$	Ар	У + Д	—
3	Превращение обыкновенных дробей в округленные десятичные.	VI$_2$	Ар	У + Д	—
4	Сокращённое умножение.	VI$_3$	Ар	2 У + Д	—
5	Сокращённое деление.	VI$_3$	Ар	У + Д	4
6	Сравнение дробей	VI$_4$ или VII$_3$	Ал, Неравенства	У + Д	3
7	Все действия с десятичными дробями.	VII$_1$	Ал, Алг. дроби	У	3, 4, 5
8	Все действия с обыкновенными дробями.	VII$_1$	Ал, Алг. дроби	$^1/_2$ У + Д	3, 4, 5
9	Четыре действия над числами, заданными графически.	VII$_2$	Ал, Ур. I степ.	У + 2 Д	4, 5
10	Линейные функции (многочлены I-ой степени).	VII$_2$	Ал, Ур. I степ.	У + Д	—
11	Решение систем линейных уравнений.	VII$_3$	Ал, Реш. систем 1 степ.	У + Д	10
12	Сравнение выражений, содержащих радикалы.	VII$_4$	Ал, Извлеч. кв. корня	У + 2 Д	6
13	Извлечение квадратных корней.	VIII$_1$	Ал, Степени и корни	$^1/_2$ У + Д + $^1/_2$ У	—
14	Длина ломаной линии.	VIII$_3$	Г, Метр. соотн. в треуг.	У + Д	—

Продолжение.

№	Название упражнения	Класс и четв.	Предмет[1] и раздел курса	Время, нужное для выполнения[2]	Упражн. тематич. связанн.
15	Вычисления по многоколонным схемам.	$VIII_1$	Ал, Степени и корни	У + Д	—
16	Решение систем второго порядка.	$VIII_3$	Ал, Реш. систем 2 пор.	У + 2 Д	10, 11, 15
17	Последовательные степени.	$VIII_1$	Ал, Степени и корни	$^1/_2$ У + Д + $^1/_2$ У	4
18	Многочлены.	$VIII_2$	Ал, Кв. ур.	У + Д	15
19	Вписанные прямоугольники.	$VIII_3$	Ал, Кв. ур. или Г, Метр. соотн.	У + Д	15
20	Текстовая задача о пароходах.	$VIII_2$	Ал, Кв. ур.	У + Д + $^1/_2$ У	—
21	Прямолинейное движение.	$VIII_2$	Ал, Кв. ур.	У + Д	—
22	Движение на плоскости.	$VIII_4$	Ал, функц. и их графики	У + 2 Д	18, 21
23	Движение по вращающемуся лучу.	$VIII_4$	Ал, функц. и их графики	У + Д	21, 22
24	Решение прямоугольных треугольников.	$VIII_3$	Триг. функц. остр. угла	У + Д	4, 5

---

[1] Ар = Повторение арифметики, Ал = алгебра, Г = геометрия.

[2] „*m* У + *n* Д" означает: *m* классных уроков, затем *n* домашних заданий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие . . . 3
От автора . . . 7
1. Метод проверки с помощью девятки . . . 13
2. Проверка умножения табличным методом . . . 24
3. Превращение обыкновенных дробей в десятичные . . . 29
4. Сокращённое умножение . . . 40
5. Сокращённое деление . . . 48
6. Сравнение дробей . . . 54
7. Все действия с десятичными дробями . . . 63
8. Все действия с обыкновенными дробями . . . 68
9. Четыре действия над числами, заданными графически . . . 78
10. Линейные функции . . . 88
11. Решение систем линейных уравнений . . . 95
12. Сравнение выражений, содержащих радикалы . . . 100
13. Извлечение квадратных корней . . . 109
14. Длина ломаной линии . . . 113
15. Вычисления по многоколонным схемам . . . 118
16. Решение систем второго порядка . . . 123
17. Последовательные степени . . . 131
18. Многочлены . . . 137
19. Вписанные прямоугольники . . . 141
20. Текстовая задача о пароходах . . . 149
21. Прямолинейное движение . . . 157
22. Движение на плоскости . . . 162
23. Движение точки по вращающемуся лучу . . . 166
24. Решение прямоугольных треугольников . . . 171
Перечень упражнений с добавлением некоторых характеристик . . . 178

Отв. редактор *И. В. Арнольд* Техн. редактор *П. Г. Ислентьева*

А10139. Подписано к печати 10/X 1947 г. Печ. л. 11,25. Уч.-изд. л. 8,58
Тираж 15.000 экз. Заказ № 956

2-я фабрика детккниги Детгиза Министерства Просвещения РСФСР
Ленинград, 2-я Советская 7.

4 р. 50 к.

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ
в 1947 г.

АБАКУМОВ С. И., проф., Методика пунктуации. 116 стр., ц. 3 р.

БОЧАРОВ Г. К., Живое слово преподавателя литературы. 138 стр., ц. 4 р.

ГАЛАНИН Д. Д., Понятие энергии в курсе физики семилетней школы. 72 стр., ц. 2 р. 50 к.

ГВОЗДЕВ А. Н., проф., Основы русской орфографии. 69 стр., ц. 2 р.

ГРОМБАХ С. М., Очерки по школьной гигиене. 126 стр., ц. 4 р.

ГУЛЬ И. М., Геометрия Лобачевского. 100 стр., ц. 3 р.

ПЕРЕПЕЛКИН Д. И., Геометрические построения в средней школе. 84 стр., ц. 2 р. 50 к.

РЕДОЗУБОВ С. П., Обучение грамоте. 128 стр., ц. 3 р.

ЧЕТВЕРУХИН Н. Ф., проф., Стереометрические задачи. 60 стр., ц. 1 р. 50 к.

ШАЛАЕВ В. Ф., Практическая работа учащихся начальной школы на пришкольном участке. 126 стр., ц. 3 р. 50 к.

МОНОСЗОН Э. М., Воспитание сознательной дисциплины в процессе обучения. 200 стр., ц. 6 р. 50 к.

Школьные учебники СССР

SHEBA.SPB.RU/SHKOLA